

ESTE EXEMPLAR CORRESPONDE A REDAÇÃO FINAL DA  
TESE DEFENDIDA POR ...FLÁVIO NUNES  
PEREIRA..... E APROVADA  
PELA COMISSÃO JULGADORA EM ...30/01/2009.

.....  
ORIENTADOR

UNIVERSIDADE ESTADUAL DE CAMPINAS  
FACULDADE DE ENGENHARIA MECÂNICA  
COMISSÃO DE PÓS-GRADUAÇÃO EM ENGENHARIA MECÂNICA

# Propagação de Ondas e Detecção de Danos com Modelos de Barra de Alta Ordem pelo Método do Elemento Espectral

Autor: Flávio Nunes Pereira

Orientador: Prof. Dr. José Maria Campos dos Santos

UNIVERSIDADE ESTADUAL DE CAMPINAS  
FACULDADE DE ENGENHARIA MECÂNICA  
COMISSÃO DE PÓS-GRADUAÇÃO EM ENGENHARIA MECÂNICA  
DEPARTAMENTO DE MECÂNICA COMPUTACIONAL

# Propagação de Ondas e Detecção de Danos com Modelos de Barra de Alta Ordem pelo Método do Elemento Espectral

**Autor:** Flávio Nunes Pereira

**Orientador:** José Maria Campos dos Santos

**Curso:** Engenharia Mecânica

**Área de concentração:** Mecânica dos Sólidos e Projeto Mecânico

Dissertação de mestrado apresentada à comissão de Pós Graduação da Faculdade de Engenharia Mecânica, como requisito para a obtenção do título de Mestre em Engenharia Mecânica.

Campinas, 2009

SP-Brasil



FICHA CATALOGRÁFICA ELABORADA PELA  
BIBLIOTECA DA ÁREA DE ENGENHARIA E ARQUITETURA - BAE - UNICAMP

P414p      Pereira, Flavio Nunes  
Propagação de ondas e detecção de danos com  
modelos de barra de alta ordem pelo método do elemento  
espectral / Flavio Nunes Pereira. --Campinas, SP: [s.n.],  
2009.

Orientador: José Maria Campos dos Santos.  
Dissertação de Mestrado - Universidade Estadual de  
Campinas, Faculdade de Engenharia Mecânica.

1. Propagação de onda. 2. Análise espectral. I.  
Santos, José Maria Campos dos. II. Universidade  
Estadual de Campinas. Faculdade de Engenharia  
Mecânica. III. Título.

Título em Inglês: Wave propagation and damage detection with high order rod models  
by the spectral element method

Palavras-chave em Inglês: Wave propagation, Spectral analysis

Área de concentração: Mecânica dos Sólidos e Projeto Mecânico

Titulação: Mestre em Engenharia Mecânica

Banca examinadora: Arcanjo Lenzi, José Roberto de França Arruda

Data da defesa: 30/01/2009

Programa de Pós Graduação: Engenharia Mecânica

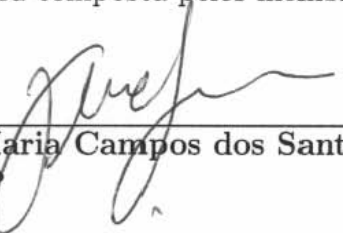
UNIVERSIDADE ESTADUAL DE CAMPINAS  
FACULDADE DE ENGENHARIA MECÂNICA  
COMISSÃO DE PÓS-GRADUAÇÃO EM ENGENHARIA MECÂNICA  
DEPARTAMENTO DE MECÂNICA COMPUTACIONAL  
DISSERTAÇÃO DE MESTRADO ACADEMICO

# Propagação de Ondas e Detecção de Danos com Modelos de Barra de Alta Ordem pelo Método do Elemento Espectral

Autor: Flávio Nunes Pereira


Orientador: Prof. Dr. José Maria Campos dos Santos

A banca examinadora composta pelos membros abaixo aprovou esta dissertação.



---

Prof. Dr. José Maria Campos dos Santos, Presidente  
FEM/UNICAMP



---

Prof. Dr. Arcanjo Lenzi  
DEM/UFSC



---

Prof. Dr. José Roberto de França Arruda  
FEM/UNICAMP

Campinas, 30 de Janeiro de 2009.

## Dedicatória

Dedico este trabalho aos meus pais, Gregório Pereira (*In Memoriam*) e Elza de Jesus Nunes Pereira e ao meu irmão Fábio Nunes Pereira.

## Agradecimentos

E acima de tudo a Deus que sempre me deu saúde e coragem para enfrentar os obstáculos da vida.

Ao meu orientador, Professor José Maria Campos dos santos pela oportunidade, confiança, apoio, companheirismo e principalmente pela paciência durante este período que trabalhamos juntos.

Ao grande amigo Vilson pelos conselhos, apoio e horas de estudos juntos.

A meu querido irmão Fábio Nunes Pereira, que lado a lado sempre caminhamos juntos em busca de um futuro melhor e de mais alegria para as nossas vidas.

Aos professores do departamento de mecânica computacional pela conhecimento transmitido.

Aos companheiros de república: Adilto "Bucho", André "andrezinho", Lourival "Magro", Lourival "Gordo" e Hairton pelas horas de convivência.

Aos amigos do Departamento.

*“O pessimista reclama do vento,  
O otimista espera que ele mude,  
O sábio ajusta as velas.*

John Maxwell

## Resumo

PEREIRA, Flávio Nunes, *Propagação de Ondas e Detecção de Danos com Modelos de Barra de Alta Ordem pelo Método do Elemento Espectral*. Campinas, 2008. 109p. Dissertação de mestrado - Faculdade de Engenharia Mecânica - Universidade Estadual de Campinas.

Este trabalho investiga o problema de propagação de ondas em estruturas do tipo barra com modelos de alta ordem. O enfoque principal do trabalho concentra-se na implementação de modelos numéricos que representem o fenômeno da propagação de ondas em barras saudáveis e danificadas por uma trinca. Para a investigação do problema utilizou-se o Método do Elemento Espectral, o qual consiste em uma solução analítica das equações diferenciais da onda no domínio da frequência utilizando-se técnicas matriciais similares ao Método dos Elementos Finitos. Quatro modelos de barra, com diferentes modos de propagação, foram implementados computacionalmente em linguagem Matlab®: o modelo elementar; modelo de Love ou do primeiro modo; o modelo de Mindlin-Herrmann ou de dois modos; e o modelo de Mindlin-McNiven ou dos três modos. Para cada modelo de barra foram implementados os elementos espectrais: saudável finito, saudável semi-infinito e trincado. Para avaliar o comportamento da onda durante sua propagação nas estruturas analisadas, diferentes exemplos numéricos foram feitos e validados através de comparações com resultados similares encontrados na literatura. As estruturas são excitadas por forças impulsivas construídas por uma onda senoidal modulada com uma janela triangular. Os resultados confirmam que os modelos de elemento espectral representam muito bem o fenômeno da propagação de onda em uma estrutura e também podem ser usados como uma ferramenta eficiente para a localização de trincas.

*Palavras chaves:* Propagação de onda em estruturas, Método do elemento espectral, Detecção de falhas, Modelos de barra.

## Abstract

PEREIRA, Flávio Nunes, *Wave Propagation and Damage Detection with High Order Rod Models by the Spectral Element Method* Campinas, 2008. 109p. Dissertação de mestrado - Faculdade de Engenharia Mecânica - Universidade Estadual de Campinas.

This work investigates the wave propagation problem in high order rod type structures. The main approach is the implementation of numerical models that represent the phenomenon of wave propagation in healthy and cracked rods. The investigation uses the Spectral Element Method, which consists of an analytical solution of wave differential equations in the frequency domain using matrix techniques similar to the Finite Element Method. Four rod models with different propagation modes were implemented computationally in Matlab<sup>®</sup> language: the elementary model; Love's model or the first model, Mindlin-Herrmann's model or the two model, and Mindlin-McNiven's model or the three-model. For each type of rod spectral elements were implemented: finite healthy, throw-off healthy and cracked. To evaluate the wave propagation behavior in the analyzed structures, different numerical examples were made and validated through comparisons with similar results from the literature. The structures are excited by impulsive forces built by a sine wave modulated with a triangular window. The results confirm that the Spectral Element Method represent the phenomenon of the wave propagation very well in a structure and they can also be used as an efficient tool for the location of crack.

*Key words:* Structural wave propagation, Spectral element method, Damage detection, Rod models.

# Sumário

<b>1</b>	<b>Introdução</b>	<b>1</b>
1.1	Objetivo . . . . .	3
1.2	Organização do trabalho . . . . .	3
<b>2</b>	<b>Revisão Bibliográfica</b>	<b>5</b>
<b>3</b>	<b>Formulações Espectrais de Barra</b>	<b>9</b>
3.1	Modelo Elementar . . . . .	9
3.1.1	Elemento Espectral Elementar . . . . .	11
3.1.2	Elemento Espectral Elementar Semi-Infinito . . . . .	14
3.1.3	Elemento Espectral Elementar Trincado . . . . .	15
3.1.4	Flexibilidade da Trinca . . . . .	18
3.2	Modelo de Love ou de Um Modo . . . . .	21
3.2.1	Elemento Espectral de Love . . . . .	23
3.2.2	Elemento Espectral de Love Semi-Infinito . . . . .	25
3.2.3	Elemento Espectral de Love Trincado . . . . .	26
3.3	Modelo de Mindlin-Herrmann ou dos Dois Modos . . . . .	27
3.3.1	Elemento Espectral de Mindlin-Herrmann . . . . .	30
3.3.2	Elemento Espectral de Mindlin-Herrmann Semi-Infinito . . . . .	33
3.3.3	Elemento Espectral de Mindlin-Herrmann Trincado . . . . .	34
3.4	Modelo dos Três Modos ou de Mindlin-McNiven . . . . .	39
3.4.1	Elemento Espectral dos Três Modos . . . . .	41
3.4.2	Elemento Espectral dos Três Modos Semi-Infinito . . . . .	45
3.4.3	Elemento Espectral dos Três Modos Trincado . . . . .	46
3.5	Introdução às Ondas de Lamb . . . . .	53



3.5.1	Formulação . . . . .	53
3.5.2	Problema para uma placa livre . . . . .	54
<b>4</b>	<b>Resultados Numéricos</b>	<b>59</b>
4.1	Introdução . . . . .	59
4.2	Exemplos do Modelo Elementar . . . . .	61
4.3	Exemplos do Modelo de Love . . . . .	70
4.4	Exemplos do Modelo de Mindlin-Herrmann . . . . .	81
4.5	Exemplos do Modelo dos Três Modos . . . . .	91
<b>5</b>	<b>Conclusão</b>	<b>103</b>
5.1	Sugestões de trabalhos futuros . . . . .	106
5.2	Trabalhos publicados . . . . .	106
	<b>Referências Bibliográficas</b>	<b>107</b>

# Lista de Figuras

3.1	Modelo elementar de barra. . . . .	10
3.2	Modelo elementar do elemento espectral de barra. . . . .	12
3.3	Modelo do elemento espectral de barra semi-infinito. . . . .	14
3.4	Modelo do elemento espectral de barra com uma trinca. . . . .	15
3.5	Detalhe da barra na posição trincada. . . . .	16
3.6	Modos fundamentais de deslocamento na superfícies da trinca. . . . .	19
3.7	Modelo de barra de Love. . . . .	21
3.8	Forças e deslocamentos para uma barra de Mindlin-Herrmann. . . . .	27
3.9	Modelo de Mindlin-Herrmann espectral de barra. . . . .	31
3.10	Modelo de Mindlin-Herrmann de elemento espectral de barra semi-infinito. . . . .	33
3.11	Modelo do elemento espectral de barra trincada para a teoria de Mindlin-Herrmann .	34
3.12	Forças e deslocamentos para o modelo de barra dos três modos . . . . .	39
3.13	Modelo espectral de barra para a teoria dos Três Modos. . . . .	43
3.14	Modelo dos Três modos do elemento espectral de barra semi-infinito. . . . .	45
3.15	Elemento espectral de barra trincada para o modelo dos Três Modos . . . . .	46
3.16	Geometria da placa com duas superfáceis livres. . . . .	54
3.17	Estado plano de tensão. . . . .	55
3.18	Representação dos modos: Simétricos e Anti-simétricas. . . . .	57
4.1	Curvas de dispersão das ondas de Lamb para uma placa fina: <i>a)</i> Castaings <i>et al.</i> (2002); e <i>b)</i> programa implementado no Matlab. . . . .	60
4.2	Velocidade das ondas de Lamb para uma placa fina: <i>a)</i> Yang e Qiao (2005) <i>b)</i> programa implementado no Matlab. . . . .	60
4.3	Gráficos de dispersão: <i>a)</i> número de onda; <i>b)</i> velocidade de fase, para o modelo elementar e da placa de Lamb. . . . .	61

4.4	Estrutura de teste com o elemento: a) saudável; b) trincado. . . . .	62
4.5	Força de excitação para a barra: a) Pulso-80 com frequência central de 80 kHz e b) Pulso-160 com frequência central de 160 kHz. . . . .	63
4.6	Respostas obtidas para as teorias elementar no nó 2 para o Pulso-80: a) estrutura saudável; b) estrutura trincada com uma trinca de 20%. . . . .	64
4.7	Resposta em aceleração no ponto de excitação: a) estrutura saudável; b) estrutura trincada; c) diferença. . . . .	65
4.8	Resposta em aceleração ao longo do comprimento do elemento saudável para vários instantes de tempo e força de excitação Pulso-80. . . . .	66
4.9	Resposta em aceleração ao longo do comprimento do elemento de barra trincado (10%) para vários instantes de tempo e força de excitação Pulso-80. . . . .	67
4.10	Resposta em aceleração ao longo do comprimento do elemento de barra trincado (10%) para vários instantes de tempo e força de excitação de Pulso-160. . . . .	68
4.11	Resposta em aceleração ao longo do comprimento do elemento de barra trincado (15%) para vários instantes de tempo e força de excitação Pulso-80. . . . .	69
4.12	Representação tempo-espaco da propagação da onda do modelo elementar: a) barra saudável; e b) barra trincada, com excitação do Pulso-80. . . . .	70
4.13	Gráficos de dispersão: a) número de onda; b) velocidade de fase, para o modelo elementar, de Love e da placa de Lamb. . . . .	71
4.14	Resposta à excitação Pulso-80 dos modelos elementar e de Love para uma barra saudável: a) resultados segundo Krawczuk <i>et al.</i> (2002a) b) resultados segundo o programa implementado. . . . .	72
4.15	Resposta ao Pulso-80 dos modelos elementar e de Love para uma barra trincada: a) Resultados segundo Krawczuk <i>et al.</i> (2002b) b) Resultados segundo o programa implementado. . . . .	73
4.16	Respostas dos modelos elementar e de Love no nó 2 com força de excitação: a) Pulso-80; b) Pulso-160. . . . .	74
4.17	Respostas no nó 2 dos modelos elementar e de Love trincados com força de excitação: a) Pulso-80; b) Pulso-160. . . . .	75
4.18	Resposta ao Pulso-80 dos modelos elementar e de Love para uma barra trincada em função do comprimento da barra para diferentes instantes de tempo. . . . .	76

4.19	Resposta ao Pulso-80 no ponto de excitação para: <i>a</i> ) estrutura saudável; <i>b</i> ) estrutura trincada; <i>c</i> ) diferença saudável-trincada. . . . .	77
4.20	Resposta ao Pulso-80 ao longo do comprimento em diferentes instantes de tempo para a estrutura: <i>a</i> ) saudável; <i>b</i> ) trincada com 10%,. . . . .	78
4.21	Resposta em aceleração ao longo do comprimento do elemento de barra trincado (10%) para vários instantes de tempo e força de excitação de Pulso-160. . . . .	79
4.22	Resposta em aceleração ao longo do comprimento do elemento de barra trincado (15%) para vários instantes de tempo e força de excitação Pulso-80. . . . .	80
4.23	Representação tempo-espaço da propagação da onda no modelo de barra de Love: <i>a</i> ) saudável; e <i>b</i> ) trincada, com excitação do Pulso-80. . . . .	81
4.24	Gráficos de dispersão: <i>a</i> ) número de onda; <i>b</i> ) velocidade de fase ; <i>c</i> ) velocidades de fase ampliada ; e <i>d</i> ) velocidade de grupo . . . . .	82
4.25	Resposta ao Pulso-80 dos modelos elementar e de Mindlin-Herrmann para uma barra saudável: <i>a</i> ) resultados segundo Krawczuk <i>et al.</i> (2002a) <i>b</i> ) resultados segundo o programa implementado. . . . .	84
4.26	Número de ondas de Mindlin-Herrmann: <i>a</i> ) parte real <i>b</i> ) parte imaginaria. . . . .	84
4.27	Resposta ao Pulso-80 dos modelos elementar e de Mindlin-Herrmann para uma barra trincada: <i>a</i> ) Resultados segundo Krawczuk <i>et al.</i> (2002b) <i>b</i> ) Resultados segundo o programa implementado. . . . .	85
4.28	Representação tempo-espaço da propagação da onda no modelo de barra de Mindlin-Herrmann: <i>a</i> ) saudável; e <i>b</i> ) trincada, com excitação do Pulso-80. . . . .	86
4.29	Sinal da força de excitação Pulso-250. . . . .	86
4.30	Resposta para vários instantes de tempo ao longo do comprimento da barra para o Pulso-250. . . . .	87
4.31	Representação tempo-espaço da propagação da onda no modelo de Mindlin-Herrmann de uma barra saudável com excitação do Pulso-250: <i>a</i> ) vista isométrica <i>b</i> ) vista de topo. . . . .	88
4.32	Representação tempo-espaço da propagação da onda no modelo de Mindlin-Herrmann de uma barra trincada com excitação do Pulso-250: <i>a</i> ) vista isométrica <i>b</i> ) vista de topo. . . . .	89

4.33	Resposta do segundo modo de propagação à excitação do Pulso-250 e os modos de deformação da secção transversal para o modelo de Mindlin-Herrmann. . . . .	90
4.34	Resposta do primeiro modo de propagação à excitação do Pulso-250 e os modos de deformação da secção transversal para o modelo de Mindlin-Herrmann. . . . .	91
4.35	Graficos de dispersão: <i>a</i> ) número de onda; <i>b</i> ) velocidade de fase ; <i>c</i> ) velocidade de fase ampliada e <i>d</i> ) velocidade de grupo . . . . .	92
4.36	Resposta ao Pulso-80 dos modelos elementar e dos três modos para uma barra saudável: <i>a</i> ) resultados segundo Krawczuk <i>et al.</i> (2002a) <i>b</i> ) resultados segundo o programa implementado. . . . .	93
4.37	Número de Onda dos três modos: <i>a</i> ) parte real <i>b</i> ) parte imaginaria. . . . .	94
4.38	Resposta ao Pulso-80 dos modelos elementar e dos três modos para uma barra trincada: <i>a</i> ) resultados segundo Krawczuk <i>et al.</i> (2002b) <i>b</i> ) resultados segundo o programa implementado.. . . .	95
4.39	Representação tempo-espaço da propagação da onda no modelo dos três modos: <i>a</i> ) saudável; e <i>b</i> ) trincado, com excitação do Pulso-80. . . . .	96
4.40	Resposta para vários instantes de tempo ao longo do comprimento da barra, altura $h/2$ , para o Pulso-250. . . . .	97
4.41	Representação tempo-espaço da propagação da onda no modelo dos três modos de uma barra saudável com excitação do Pulso-250: <i>a</i> ) vista isométrica <i>b</i> ) vista de topo. . . . .	98
4.42	Representação tempo-espaço da propagação da onda no modelo dos três modos de uma barra trincada com excitação do Pulso-250: <i>a</i> ) vista isométrica <i>b</i> ) vista de topo. . . . .	99
4.43	Resposta do segundo modo de propagação à excitação do Pulso-250 e os modos de deformação da secção transversal para o modelo dos três modos. . . . .	100
4.44	Resposta do terceiro modo de propagação à excitação do Pulso-250 e os modos de deformação da secção transversal para o modelo dos três modos. . . . .	101
4.45	Resposta do primeiro modo de propagação à excitação do Pulso-250 e os modos de deformação da secção transversal para o modelo dos três modos. . . . .	102

# Nomenclatura

## *Letras Latinas*

### Maiúsculas

$A, B, C, D, X$ e $Y$	Constantes arbitrárias
$A_S$	Área da seção transversal da barra
$A_c$	Área da seção transversal trincada
$E$	Módulo de elasticidade de Yaung
$F$	Força axial
$I$	Momento de inércia de área
$J$	Momento polar de inércia
$\hat{\mathbf{K}}$	Matriz de rigidez dinâmica do elemento espectral
$K_I, K_{II}$ e $K_{III}$	Fatores de intensidade de tensão na ponta da trinca correspondentes aos três modos de abertura da trinca
$Kr_I$ e $Kr_{II}$	São constantes
$L$	Comprimento
$L_1$	Distância da trica até o nó 1
$P$	Indica as forças independentes que atuam sobre a estrutura
$Q$	Força com relação a $\psi$
$R$	Razões de Amplitude
$T$	Energia cinética total
$U$	Energia de total de deformação
$U_t$	Energia de deformação elástica causada pela presença da trinca
$V$	Potencial das forças aplicadas

## Minusculas

$a$	Profundidade da trinca
$b$	Base
$c$	Flexibilidade local provocada pelo aparecimento da trinca
$c_0$	Velocidade de fase
$c_g$	Velocidade de grupo
$d$	Espessura da placa de Lamb
$h$	Altura
$i$	Número complexo, $i = \sqrt{-1}$
$k_E, k_L, k_M$ e $k_T$	Número de onda para o modelo elementar, de Love, de Mindlin-Herrmann e dos Três Modos, respectivamente
$t$	Tempo
$u$	Deslocamento longitudinal
$v$	Deslocamento transversal
$x, y, z$	Coordenadas do sistemas

## Letras Gregas

$\alpha$	Variável adimensional $\alpha = a/h$
$\varepsilon$	Deformação
$\eta$	Fator de amortecimento estrutural interno histerético
$\lambda$	Constante de Lamé
$\mu$	Constante de Lamé
$\nu$	Coefficiente de Poisson
$\rho$	Densidade
$\sigma$	Tensão
$\tau$	Distância da centroide até um ponto qualquer da barra
$\omega$	Frequência
$\omega_c$	Frequência de corte
$\theta$	Flexibilidade adimensional da trinca
$\psi$ e $\phi$	Deslocamento
$\hat{\phantom{x}}$	Indica que a função encontra-se no domínio da Frequência
$'$	Indica derivada

# Capítulo 1

## Introdução

A indústria moderna vem continuamente pesquisando novas ferramentas de engenharia a fim de aumentar a segurança e a qualidade de vida do ser humano. Recentes avanços na tecnologia de materiais inteligentes têm resultado em um renovado interesse no desenvolvimento de métodos avançados de auto-diagnóstico para quantificar a integridade de uma estrutura sem a necessidade de constante interação com o ser humano. O objetivo é reduzir a intervenção do homem quando se estiver monitorando a integridade de uma estrutura permitindo um monitoramento contínuo. Com este objetivo em mente, muitos pesquisadores têm feito significativos progressos no desenvolvimento de métodos de detecção de danos (Dimarogonas 1996; Krawczuk *et al.* 2006a).

Ferramentas para a medição de ruído e de vibrações são necessárias para melhor controlar o nível desses fenômenos que proporcione um ambiente com condições ideais de trabalho. Uma questão difícil neste domínio diz respeito à identificação da distribuição da energia vibracional através da estrutura. A identificação correta dessa propagação de energia possibilitará uma análise mais eficiente para o controle desses fenômenos.

A presença de uma trinca em uma estrutura introduz uma variação da flexibilidade local que altera a sua resposta vibracional (Dimarogonas 1996). Recentemente novas pesquisas sobre detecção de danos têm se concentrado em métodos que utilizam propagação de ondas em estruturas elásticas nas faixas de médias e altas frequências (Krawczuk *et al.* 2006a; Lyon e Dejong 1995; Palacz e Krawczuk 2002). Estes métodos podem ser utilizados como modelos numéricos, como o método dos elementos finitos (FEM), que está bem consolidado como ferramenta para a previsão numérica dessas vibrações. Estes métodos são eficazes nas análises em baixa frequência, especialmente quando os modelos são ajustados com base em dados experimentais. Contudo, suas aplicações nas regiões de médias e altas frequências apresentam um inerente problema de geração



de modelos computacionalmente muito pesados.

Uma das técnicas mais comumente usadas para a faixa de altas-freqüências tem sido a Análise Estatística de Energia (SEA). Este método foi proposto nos anos 60 por Lyon e Maidanik (1962) e consiste em dividir a estrutura em um conjunto de subsistemas que interagem entre si através da troca de energia. O objetivo do SEA é prever o nível de energia vibracional em cada subsistema, os quais podem ser usados para estimar os níveis de aceleração e tensão em cada um deles. Contudo, as variações espaciais da resposta dentro de cada subsistema não podem ser obtidas, pois o método fornece apenas um nível de energia para cada subsistema.

Desenvolvido por Doyle (1997), o método do elemento espectral (SEM) é a solução analítica exata no domínio da freqüência da equação da onda formulada em deslocamento. Esta solução é construída de forma a utilizar o mesmo conceito matricial usado na montagem de modelo de elementos finitos. Por ser a solução exata do modelo no domínio da freqüência, um elemento espectral pode ser visto como infinitos elementos finitos. Desta forma, um elemento finito geometricamente uniforme pode ser representado utilizando-se um único elemento espectral, reduzindo significativamente o numero total de graus de liberdade em comparação a outros métodos. Contudo, existem ainda dificuldades para a obtenção de elementos não-uniformes e na aplicação de condições de contorno arbitrárias.

Neste trabalho, modelos de propagação de ondas e detecção de danos em estruturas tipo barra utilizando o método do elemento espectral apresentados por Krawczuk (2006) são implementados e verificados para os modelos de barra de ordem mais elevada, os quais levam em consideração o efeito de Poisson e formas dos modos de deformação não-uniforme na seção transversal da barra.

Os exemplos simulados utilizam o modelo de barra elementar, de Love, de Mindlin-Herrmann e dos três modos. Para cada modelo foi desenvolvido um elemento espectral saudável finito, um semi-infinito e um trincado. Todos os elementos foram implementados computacionalmente e analisados em termos da propagação de ondas e da detecção de danos. Estes resultados são comparados com aqueles encontrados na literatura. O elemento de barra é excitado por diferentes tipos de força impulsiva a fim de determinar a influência do sinal para o processo de propagação da onda. Os resultados simulados são apresentados, validados e as principais divergências discutidas.

## 1.1 Objetivo

O objetivo deste trabalho é contribuir para o desenvolvimento do método do elemento espectral, através da implementação, verificação e análise de elementos espectrais de barra de ordem mais elevada, em termos de propagação de ondas e detecção de danos.

Os objetivos específicos são implementar e analisar:

- Um elemento espectral de barra finito.
- Um elemento espectral de barra semi-infinito (*throw-off*).
- Um elemento espectral de barra com uma trinca.

Cada um dos modelos de elemento espectral são criados para os modelos de barra elementar, de Love, de Mindlin-Herrmann e dos Três Modos.

## 1.2 Organização do trabalho

A dissertação está organizada da seguinte maneira:

Neste capítulo (Capítulo 1) foi realizada uma introdução a respeito do tema a ser estudado justificando a necessidade de desenvolver este trabalho.

No Capítulo 2 é apresentada uma revisão bibliográfica dos trabalhos publicados sobre o assunto com os conceitos que são necessários para o entendimento do contexto e do tema abordado.

No Capítulo 3 é apresentada a formulação teórica do método do elemento espectral para os elementos de barra saudável finito, semi-infinito e trincado utilizando os modelos elementar, de Love, de Mindlin-Herrmann e dos três modos. o capítulo também apresenta uma breve introdução sobre a formulação das ondas de Lamb.

No Capítulo 4 apresentam-se os resultados das simulações numéricas, os quais são obtidos das análises em uma estrutura-exemplo compostas por um elemento espectral de barra finito, saudável ou trincado, e um semi-infinito excitado por diferentes forças impulsivas. Os resultados são analisados em termos da propagação de ondas e detecção de danos, bem como comparados com aqueles encontrados na literatura. As divergências encontradas são apresentadas e discutidas.

No Capítulo 5 são apresentadas as conclusões, as sugestões para trabalhos futuros e as publicações geradas no decorrer do desenvolvimento do trabalho.

# Capítulo 2

## Revisão Bibliográfica

Nesta seção apresenta-se uma revisão do trabalhos encontrados na literatura, nos últimos quinze anos, considerados mais relevantes para a área de pesquisa abordada e para o desenvolvimento do trabalho.

Nas últimas décadas vários trabalhos foram realizados para desenvolver métodos de inspeção de danos baseados em vibrações da estrutura, que permitam identificar e monitorar trincas a partir de mudanças na frequência natural, nos modos de vibração e também na amplitude das respostas forçadas (Dimarogonas 1996). Alguns desses estudos realizados entre os anos de 1971 e 1992 são apresentados e discutidos por Dimarogonas (1996), que destaca as principais teorias utilizadas em dinâmica de estruturas danificadas. Kirmscher (1944) apud Dimarogonas (1996) realizou os primeiros estudos para avaliar as características vibracionais de um modelo analítico de viga com dano, onde o dano foi considerado como uma descontinuidade local responsável pela perda da rigidez do componente estrutural. O efeito do dano foi simulado através da redução de área da secção transversal. A grande maioria dos trabalhos neste período simulavam o dano através de uma variação de área da secção transversal, momento de inércia, modulo de elasticidade sobre um modelo estrutural analítico ou numérico (métodos dos elementos finitos).

Dimarogonas e Papadopoulos (1983) publicaram um artigo apresentando um elemento finito contendo uma trinca, considerando apenas um modo de abertura da trinca sujeito a carregamento de flexão baseado no fator intensidade de tensão. Novamente, Papadopoulos e Dimarogonas (1986) estenderam esse modelo do elemento contendo a trinca para três modos de abertura da trinca devido aos possíveis esforços internos (tração, flexão e torção). Isto permitiu verificar o efeito do acoplamento entre as vibrações longitudinais e de flexão. Estas formulações por elementos finitos utilizando os fatores de intensidade de tensão tem sido uma das mais utilizadas para simulação de

trincas em estruturas.

Qian *et al.* (1990) desenvolveram uma matriz de rigidez de elemento finito de viga de secção retangular contendo trinca, a qual foi derivada dos fatores de intensidade de tensão. Considerando o modelo de uma viga em balanço, foram determinadas as frequências naturais através da equação de movimento variando-se o comprimento e a posição da trinca, que foram apresentadas em gráficos juntamente com valores experimentais. Nesse artigo é proposto também um método para identificação da posição da trinca através das medições dos primeiros autovetores.

Chondros *et al.* (1996) utilizaram aproximação variacional para o problema de vigas trincadas através da teoria de vibração para viga de Bernoulli-Euler trincada. Eles apresentaram resultados analíticos comparados com experimentais para a variação das frequências naturais.

Kisa *et al.* (1998) propuseram uma teoria baseada na aproximação por sub-estrutura, que dado um sistema global não linear contendo uma descontinuidade local este é separado em dois subsistemas lineares, modelados por elementos finitos tipo viga de Timoshenko com dois nós e três graus de liberdade/nó, sendo o efeito da trinca simulado por um elemento de rigidez de comprimento zero. Neste artigo os resultados das simulações pelo método de elementos finitos para uma viga em balanço mostraram boa correlação quando comparados com resultados experimentais disponíveis na literatura.

Krawczuk *et al.* (2000) desenvolveram um elemento finito baseado na mecânica de fratura elasto-plástica considerando o raio da zona plástica na ponta da trinca. O modelo contém dois nós com dois graus de liberdade por nó. Várias simulações são mostradas com objetivo de identificar a influência do comprimento da trinca e tamanho da zona plástica na variação das frequências naturais relativas. Vale destacar neste artigo que o autor deixa claro, através de exemplos, que embora a matriz de massa do elemento contendo trinca tenha forma diferente da convencional, os resultados mostram que não há influência significativa da matriz de massa sobre as frequências naturais.

Krawczuk *et al.* (2003) apresentaram um primeiro elemento finito espectral para viga trincada de Timoshenko, que é adequado para análises modal e de propagação de ondas elásticas. No artigo é apresentada a mudança dos parâmetros modais de uma viga em função da configuração da trinca, que inclui sua profundidade e localização. São apresentados exemplos numéricos com objetivo de mostrar a influência da configuração da trinca e, como resultado destas análises, o modelo mostrou boa precisão quanto à localização da trinca.

Rizzatti (1999) implementou um elemento finito com três graus de liberdade por nó, uma trinca na região central e levou em consideração os efeitos dos carregamentos de tração, flexão e cisalhamento. O modelo implementado acrescenta o efeito do cisalhamento. Outro diferencial é a implementação do efeito da zona plástica para um elemento, considerando os carregamentos de flexão e axial.

Recentemente, os trabalhos têm se direcionado no sentido de tentar entender o comportamento da propagação de ondas elásticas em estruturas na faixa de alta frequência, cujo conhecimento permite prever e quantificar uma falha ou trinca (Galán e Abascal 1996; Castaings *et al.* 2002; Lee e Staszewskil 2007; Santos *et al.* 2008). Muitos desses trabalhos utilizam ondas de Lamb que se propagam na estrutura e podem ser identificadas. A informação da presença da trinca é avaliada pela reflexão das ondas. Yang e Qiao (2005) fizeram vários ensaios numéricos e experimentais para avaliar o efeito da variação das curvas de dispersão em função da frequência e das propriedades dos materiais e como isso influencia a forma de propagação das ondas de Lamb em placas finas. A estrutura é excitada por sensores piezelétricos.

O método dos elementos finitos para o estudo dos fenômenos de propagação de ondas em baixa frequência é uma alternativa muito utilizada, tendo sido implementado em vários pacotes computacionais comerciais. Em geral, estes são baseados em elementos finitos que usam funções de forma com polinômios de baixa ordem para descrever o campo de deslocamentos, onde a convergência é ditada pelo refinamento de malha, ou seja, necessitam de muitos elementos com tamanhos menores (Zienkiewicz 1977). Assim, para análises em altas frequências, os modelos computacionais tornam-se muito grandes. DeLanghe e Sas (1996) afirmam que embora o método dos elementos finitos seja eficaz em baixas frequências para a predição do ruído propagado por via estrutural ("structure-borne noise") e da vibração estrutural, ainda não é efetivo nas altas frequências, mesmo com o crescente aumento da capacidade dos computadores atuais e das sofisticações desenvolvidas no método dos elementos finitos.

Do exposto, tem sido observado de forma crescente na investigação de problemas em alta frequência a utilização de métodos de propagação de ondas como o Método dos Elementos Espectrais. Proposto inicialmente por Doyle, este método é descrito de forma extensiva e completa em um dos seus livros (Doyle 1997). Nos últimos 10 anos vários trabalhos relacionados a este método foram desenvolvidos na forma de dissertações, teses, e artigos, junto ao Departamento de Mecânica Computacional-FEM-UNICAMP (Ahmida 2001; Santos 2006; Valentim 2003).

Um dos primeiros artigos publicados utilizando o método do elemento espectral para a avaliação de um dano estrutural foi proposto por Palacz e Krawczuk (2002). Nesse trabalho é desenvolvido um elemento espectral de uma barra com uma trinca, a qual é modelada por uma flexibilidade local obtida através do teorema de Castigliano e das equações da mecânica da fratura. A variação da propagação da onda devido ao aparecimento da trinca é examinada, comparando as diferenças entre as respostas da barra saudável e trincada. A influência da profundidade da trinca é também examinada. Diferentes forças impulsivas são construídas usando um sinal senoidal modulado por uma janela triangular. Estes pulsos são usados como excitação da estrutura para determinar o melhor desempenho da resposta na detecção da trinca. No mesmo ano, Krawczuk (2002) apresentou outro trabalho utilizando o método do elemento espectral combinado a um algoritmo genético para detecção de danos em uma estrutura do tipo viga. O dano consiste em uma trinca transversal não propagante. Uma estratégia iterativa para a determinação da localização e profundidade da trinca baseado em um algoritmo genérico é descrita.

Os trabalhos apresentados anteriormente contribuíram de uma forma geral para o desenvolvimento deste trabalho. Entretanto, foi o livro do Doyle (1997) e os artigos de Krawczuk *et al* (2006a e 2006b) que, em particular, trouxeram as maiores contribuições. Krawczuk *et al.* (2006a) e Krawczuk *et al.* (2006b) apresentam o desenvolvimento teórico do elemento espectral trincado para o modelo de barra elementar, de Love, de Mindlin-Herrmann e dos três modos. Uma comparação da propagação das ondas para os modelos analisados é apresentada, comparada e discutida. Entretanto, suas análises se mantiveram em faixas de frequências que contemplam apenas o primeiro modo de propagação.

# Capítulo 3

## Formulações Espectrais de Barra

O presente capítulo apresenta o desenvolvimento das formulações do método dos elementos espectrais para estruturas unidimensionais tipo barra. Para cada teoria apresentada é mostrado com detalhes o equacionamento matemático para a obtenção da equação diferencial do movimento. Em seguida, descrevem-se os processos para a obtenção das matrizes de rigidez dinâmica de um elemento espectral finito com dois nós, de um elemento espectral semi-infinito com um nó (“throw-off”) e de um elemento espectral finito com dois nós incluindo uma trinca em uma posição arbitrária ao longo da barra. Também apresenta-se a formulação para ondas de Lamb em placas devido aos seus modos de propagação simétricos apresentarem relação direta com aqueles das ondas longitudinais em barras.

Para o elemento espectral trincado, apresenta-se um modelo de trinca que consiste em uma flexibilidade localizada, a qual é obtida com base no teorema de Castigliano e nas leis da Mecânica da Fratura. Utilizando o elemento espectral pode-se obter a solução exata do comportamento de uma barra em alta frequência com um baixo esforço computacional. Os fatos acima mencionados, sem dúvida, são características importantes, e podem ter uma grande influência sobre modernas técnicas de previsão de comportamento dinâmico e detecção de falhas estruturais.

### 3.1 Modelo Elementar

O modelo elementar considera que a barra é uma estrutura esbelta, sujeita somente a carregamentos axiais como mostra a Figura 3.1. Também assume que as tensões e deformações são unidimensionais ao longo da linha de centro da barra, constantes em toda a seção transversal e que as contrações laterais (efeito de Poisson) podem ser desprezadas (Doyle 1997).

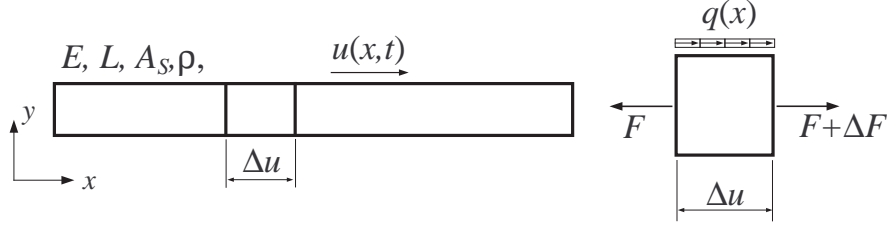


Figura 3.1: Modelo elementar de barra.

Das hipóteses pode-se escrever a deformação axial da barra como:

$$\varepsilon_{xx} = \frac{\partial u}{\partial x}, \quad (3.1)$$

onde  $u$  é o deslocamento axial da barra. Considerando que o material comporta-se de forma elástica linear, obtém-se da Lei de Hooke a tensão axial dada por:

$$\sigma_{xx} = E\varepsilon_{xx} = E \frac{\partial u}{\partial x}, \quad (3.2)$$

onde  $E$  é o módulo de elasticidade (módulo de Young). A partir da tensão pode-se obter a força axial interna da barra como:

$$F = \int \sigma_{xx} dA_S = EA_S \frac{\partial u}{\partial x}. \quad (3.3)$$

onde  $A_S$  é a área da secção transversal da barra. Considere que  $q(x, t)$  seja a força axial externamente aplicada por unidade de comprimento. Da Figura 3.1 obtém-se o equilíbrio de forças como:

$$-F + (F + \Delta F) + q\Delta x = \rho A_S \Delta x \frac{\partial^2 u(x, t)}{\partial t^2}. \quad (3.4)$$

onde  $\rho$  é a densidade. Dividindo-se a Equação (3.4) por  $\Delta x$  e fazendo-se o limite para quando  $\Delta x \rightarrow 0$  a equação do movimento torna-se,

$$\frac{\partial F}{\partial x} = \rho A_S \frac{\partial^2 u(x, t)}{\partial t^2} - q(x, t), \quad (3.5)$$



substituindo a Equação (3.3) na Equação (3.5), obtém-se,

$$\frac{\partial}{\partial x} \left[ EA_S \frac{\partial u}{\partial x} \right] = \rho A_S \frac{\partial^2 u(x, t)}{\partial t^2} - q(x, t), \quad (3.6)$$

rearranjando a Equação (3.6) obtém-se a equação diferencial do movimento de uma barra não amortecida como:

$$EA_S \frac{\partial^2 u(x, t)}{\partial x^2} - \rho A_S \frac{\partial^2 u(x, t)}{\partial t^2} = -q(x, t), \quad (3.7)$$

### 3.1.1 Elemento Espectral Elementar

Considerando que as equações diferenciais lineares podem ser obtidas em termos das derivadas no tempo e no espaço, é possível aplicar a representação espectral em cada um de seus termos (Doyle 1997). Assim, a representação espectral para a derivada no tempo pode ser escrita como:

$$\frac{\partial u(x, t)}{\partial t} = i\omega u(x, \omega) = i\omega \hat{u}. \quad (3.8)$$

onde  $\omega$  é a frequência circular,  $\hat{\cdot}$  indica que a função é a transformada de Fourier e  $i = \sqrt{-1}$ . Similarmente, a derivada no espaço pode ser escrita como:

$$\frac{\partial u(x, t)}{\partial x} = \frac{\partial u(x, \omega)}{\partial x} = \frac{\partial \hat{u}}{\partial x}. \quad (3.9)$$

Logo, a Equação (3.7) pode ser escrita em sua forma espectral como:

$$EA_S \frac{d^2 \hat{u}}{dx^2} + \omega^2 \rho A_S \hat{u} = -\hat{q}, \quad (3.10)$$

A Figura 3.2 mostra um modelo do elemento espectral de barra elástico com dois nós sujeito a forças internas dinâmicas em ambas as extremidades. Um termo de amortecimento será introduzido na formulação usando-se um módulo de elasticidade complexo,  $E_c = E(1 + i\eta)$ , onde  $\eta$  é o fator de perda para um amortecimento estrutural interno histerético.

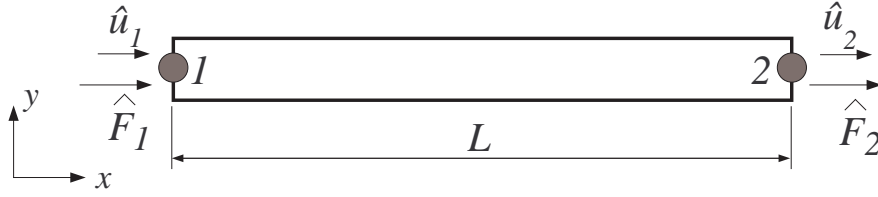


Figura 3.2: Modelo elementar do elemento espectral de barra.

A solução homogênea da Equação (3.10) pode ser escrita como:

$$\hat{u}(x) = Ae^{-ik_E x} + Be^{-ik_E(L-x)}, \quad (3.11)$$

onde  $A$  e  $B$  são constantes arbitrárias,  $L$  é o comprimento da barra,  $k_E$  é o número de onda complexo definido como:

$$k_E = \frac{\omega}{c_o}, \quad (3.12)$$

onde  $c_o$  é a velocidade de fase na barra dada por:

$$c_o = \sqrt{\frac{E_c}{\rho}}. \quad (3.13)$$

Quando a solução de propagação de onda contém mais de um componente harmônica propagante, a onda resultante é composta de duas partes, uma chamada de *onda portadora* cuja velocidade de fase é a média das velocidades de fase das componentes, e outra chamada de *onda de grupo*, a qual modula a portadora e cuja velocidade é denominada de velocidade de grupo dada por:

$$c_g = \frac{d\omega}{dk}. \quad (3.14)$$

Das Equações (3.12), (3.13) e (3.15), obtém-se:

$$c_g = \frac{d\omega}{dk} = \sqrt{\frac{E_c}{\rho}} = c_o. \quad (3.15)$$

As condições de contorno de deslocamento nas extremidades do elemento espectral de barra podem ser definidas como:

$$\begin{aligned}\hat{u}(0) &\equiv \hat{u}_1 = A + Be^{-ik_EL} \\ \hat{u}(L) &\equiv \hat{u}_2 = Ae^{-ik_EL} + B,\end{aligned}\tag{3.16}$$

onde  $\hat{u}_1$  e  $\hat{u}_2$  são os deslocamentos nodais. Resolvendo-se para  $A$  e  $B$  em termos dos deslocamentos nodais, o deslocamento longitudinal em um ponto arbitrário de uma barra finita é obtido como:

$$\hat{u}(x) = \hat{g}_1(x)\hat{u}_1 + \hat{g}_2(x)\hat{u}_2,\tag{3.17}$$

onde  $\hat{g}_1$  e  $\hat{g}_2$  são as funções de forma do elemento espectral de barra,

$$\hat{g}_1(x) = \frac{(e^{-ik_Ex} - e^{-ik_E(2L-x)})}{(1 - e^{-i2k_EL})}\tag{3.18}$$

$$\hat{g}_2(x) = \frac{(-e^{-ik_E(L+x)} + e^{-ik_E(L-x)})}{(1 - e^{-i2k_EL})}.\tag{3.19}$$

Considerando que para uma barra a força axial é dada por:

$$F(x) = EA_S \frac{du}{dx},\tag{3.20}$$

a força em um ponto arbitrário do elemento espectral de barra com dois nós pode ser escrita como:

$$\hat{F}(x) = E_c A_S [\hat{g}'_1(x)\hat{u}_1 + \hat{g}'_2(x)\hat{u}_2],\tag{3.21}$$

onde  $'$  indica a primeira derivada espacial, em relação a variável especial  $x$ . Sabendo que as forças em cada extremidade do elemento espectral de barra são  $\hat{F}_1 = -\hat{F}(0)$  e  $\hat{F}_2 = \hat{F}(L)$ , pode-se escrever a Equação (3.21) como:

$$\begin{aligned}\hat{F}_1 &= -\hat{F}(0) = -E_c A_S [\hat{g}'_1(0)\hat{u}_1 + \hat{g}'_2(0)\hat{u}_2] \\ \hat{F}_2 &= \hat{F}(L) = E_c A_S [\hat{g}'_1(L)\hat{u}_1 + \hat{g}'_2(L)\hat{u}_2],\end{aligned}\tag{3.22}$$

substituindo as Equações (3.18) e (3.19) na Equação (3.22) e escrevendo na forma matricial obtém-se a *matriz de rigidez dinâmica* de um elemento espectral de barra finito com dois nós,  $\hat{\mathbf{K}}_E$ , como:

$$\begin{Bmatrix} \hat{F}_1 \\ \hat{F}_2 \end{Bmatrix} = \underbrace{\frac{E A_S}{L} \frac{i k_E L}{(1 - e^{-i 2 k_E L})} \begin{bmatrix} 1 + e^{-i 2 k_E L} & -2 e^{-i 2 k_E L} \\ -2 e^{-i 2 k_E L} & 1 + e^{-i 2 k_E L} \end{bmatrix}}_{\hat{\mathbf{K}}_E} \begin{Bmatrix} \hat{u}_1 \\ \hat{u}_2 \end{Bmatrix}. \quad (3.23)$$

### 3.1.2 Elemento Espectral Elementar Semi-Infinito

A rigidez dinâmica de um elemento de barra semi-infinito, conhecido como elemento “throw-off”, pode ser obtida considerando-se que este elemento pode ser pensado como um elemento espectral elementar finito onde não existem reflexões na extremidade infinita do elemento, Figura 3.3.

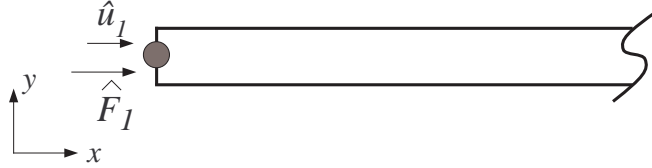


Figura 3.3: Modelo do elemento espectral de barra semi-infinito.

Desta forma, o termo  $B$  da Equação (3.11) torna-se nulo e o elemento de dois nós degenera em um elemento de um nó, obtendo-se uma nova equação do deslocamento da barra semi-infinita como:

$$\hat{u}(x) = A e^{-i k_E x}. \quad (3.24)$$

A constante  $A$  pode ser determinada a partir da condição de contorno de deslocamento nodal:

$$\hat{u}(0) = \hat{u}_1 = A. \quad (3.25)$$

A partir da Equação (3.25), o deslocamento em qualquer ponto arbitrário na barra semi-infinita é dado por:

$$\hat{u}(x) = \hat{g}_1(x) \hat{u}_1, \quad (3.26)$$

onde a função  $\hat{g}_1(x)$  é a função de forma do elemento semi-infinito,  $\hat{g}_1(x) = e^{-ik_E x}$ . Assim, a força e o deslocamento nodal no nó 1 é dado por,

$$\hat{F}_1 = ik_E EA_S \hat{u}_1. \quad (3.27)$$

O termo  $k_E EA_S$  da Equação (3.27) representa a rigidez dinâmica do elemento espectral semi-infinito, com base no modelo elementar.

### 3.1.3 Elemento Espectral Elementar Trincado

A Figura 3.4 mostra o modelo do elemento espectral de barra finito com uma trinca transversal não propagante em posição arbitrária ao longo do elemento (Palacz e Krawczuk 2002). O elemento contém dois nós com um grau de liberdade de deslocamento por nó, comprimento  $L$ , área da secção transversal  $A_S$ , posicionamento da trinca em relação ao nó 1  $L_1$ , e profundidade da trinca  $a$ .

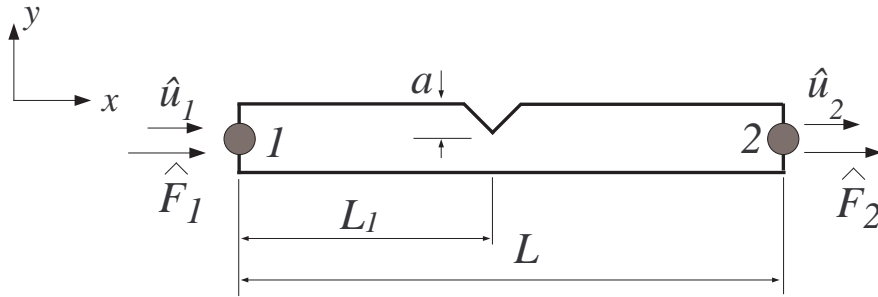


Figura 3.4: Modelo do elemento espectral de barra com uma trinca.

A solução homogênea da Equação (3.10) pode ser re-escrita em duas partes, uma à esquerda da trinca,  $\hat{u}(x)^E$ , e outra à direita da trinca,  $\hat{u}(x)^D$ , respectivamente,

$$\hat{u}(x)^E = A_1 e^{-ik_E x} + B_1 e^{-ik_E (L_1 - x)} \quad [0 \leq x \leq L_1], \quad (3.28)$$

$$\hat{u}(x)^D = A_2 e^{-ik_E (x + L_1)} + B_2 e^{-ik_E [L - (L_1 + x)]} \quad [0 \leq x \leq L - L_1]. \quad (3.29)$$

onde,  $A_1$ ,  $A_2$ ,  $B_1$  e  $B_2$  são constantes determinadas a partir das condições de contorno e de compatibilidade dos deslocamentos e forças no elemento. As condições de contorno podem ser escritas como:

Para o nó 1, coloca-se  $x = 0$  na Equação (3.28) e obtém-se o deslocamento:

$$\hat{u}(0)^E = \hat{u}_1. \quad (3.30)$$

Para o nó 2, coloca-se  $x = L - L_1$  na Equação (3.29) e obtém-se o deslocamento:

$$\hat{u}(L - L_1)^D = \hat{u}_2. \quad (3.31)$$

As condições de compatibilidade na posição da trinca podem ser determinadas em função do comportamento dos deslocamentos na região trincada. A Figura 3.5 mostra um detalhe da seção transversal da barra na região trincada onde observa-se que existem duas áreas bem definidas, uma onde a trinca foi propagada e outra que permanece saudável. Considerando-se que a largura da barra,  $b$ , é constante, a variação destas áreas será função da variação da profundidade da trinca,  $a$ , na direção  $y$ .

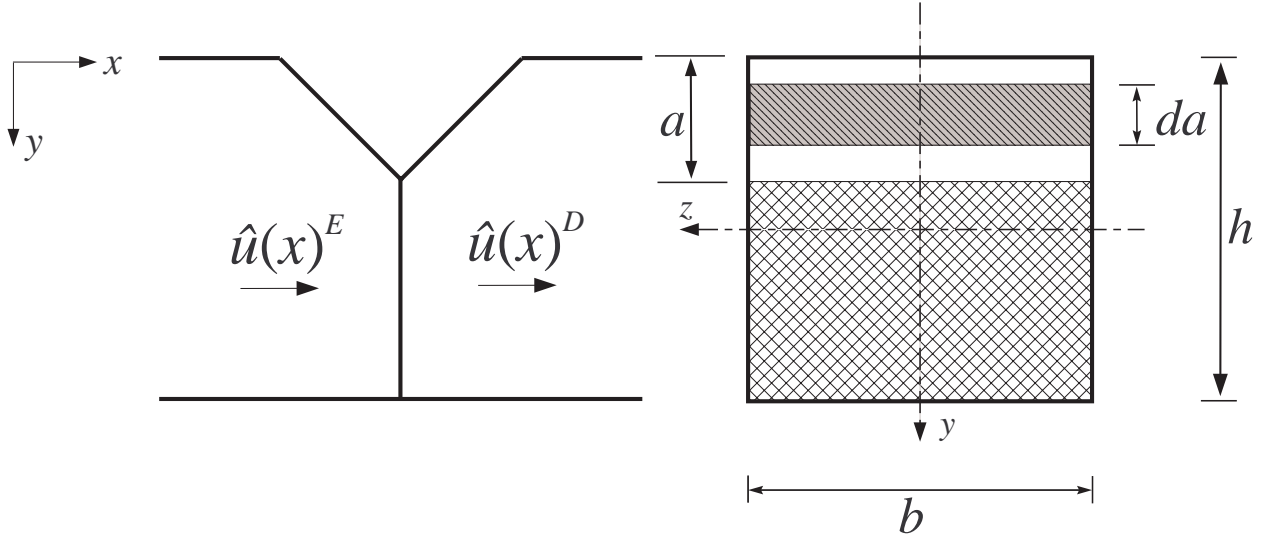


Figura 3.5: Detalhe da barra na posição trincada.

Da Figura 3.5 observa-se que para a área da secção transversal da barra saudável os deslocamentos nos lados esquerdo e direito da posição da trinca são iguais, logo obtém-se as correspondentes deformações como:

$$\frac{\partial \hat{u}(x = L_1)^E}{\partial x} = \frac{\partial \hat{u}(x = 0)^D}{\partial x}. \quad (3.32)$$

Já na área da secção transversal da barra trincada os deslocamentos nos lados esquerdo e direito da posição da trinca são diferentes. Assim, essa diferença pode ser escrita como:

$$\Delta \hat{u} = \hat{u}(x = L_1)^E - \hat{u}(x = 0)^D. \quad (3.33)$$

Sabendo-se que:

$$\Delta \hat{u} = c \hat{F}, \quad (3.34)$$

onde,  $c$  é a flexibilidade local provocada pelo aparecimento da trinca. Substituindo-se a Equação (3.3) na Equação (3.34), obtém-se:

$$\Delta \hat{u} = c E A_S \frac{d\hat{u}}{dx}, \quad (3.35)$$

Definindo-se a variável  $\theta = c E A_S$  e substituindo na Equação (3.35), produz-se:

$$\Delta \hat{u} = \theta \frac{d\hat{u}}{dx}. \quad (3.36)$$

Finalmente, substituindo-se a Equação (3.36) na Equação (3.33) encontra-se:

$$\hat{u}(L_1)^E - \hat{u}(0)^D = \theta \frac{d\hat{u}}{dx}. \quad (3.37)$$

Porém, ainda é necessário definir a variável  $\theta$  em função da flexibilidade local  $c$ . Essa definição será feita em detalhes na seção Flexibilidade da Trinca.

Substituindo as Equações (3.30), (3.31), (3.32) e (3.37) nas Equações (3.28) e (3.29), escrevendo as constantes em função dos deslocamentos na forma matricial obtém-se:

$$\begin{Bmatrix} A_1 \\ B_1 \\ A_2 \\ B_2 \end{Bmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & e^{-ik_E L_1} & 0 & 0 \\ (ik_E \theta - 1)e^{-ik_E L_1} & (-1 + ik_E \theta) & e^{-ik_E L_1} & e^{-ik_E (L - L_1)} \\ -ik_E e^{-ik_E L_1} & ik_E & ik_E e^{-ik_E L_1} & -ik_E e^{-ik_E (L - L_1)} \\ 0 & 0 & e^{-ik_E L_1} & 1 \end{bmatrix}}_{\hat{\Psi}_{ET}^{-1}}^{-1} \begin{Bmatrix} \hat{u}_1 \\ 0 \\ 0 \\ \hat{u}_2 \end{Bmatrix}. \quad (3.38)$$

As forças em cada nó do elemento espectral de barra trincada são  $\hat{F}_1 = \hat{F}(x = 0)$  e  $\hat{F}_2 = \hat{F}(x = L)$ . Logo pode-se escrever a Equação (3.21) na forma matricial como:

$$\begin{Bmatrix} \hat{F}_1 \\ \hat{F}_2 \end{Bmatrix} = \underbrace{EA_S \begin{bmatrix} ik_E & -ik_E e^{-ik_E L_1} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -ik_E e^{-ik_E L_1} & ik_E \end{bmatrix}}_{\hat{\Phi}_{ET}} \begin{Bmatrix} A_1 \\ B_1 \\ A_2 \\ B_2 \end{Bmatrix}. \quad (3.39)$$

Substituindo-se a Equação (3.38) na Equação (3.39), obtém-se a matriz de rigidez dinâmica do elemento espectral de barra trincado com dois nós,  $\hat{\mathbf{K}}_{ET}$ , como:

$$\begin{Bmatrix} \hat{F}_1 \\ \hat{F}_2 \end{Bmatrix} = \underbrace{\hat{\Phi}_{ET} \hat{\Psi}_{ET}^{-1}}_{\hat{\mathbf{K}}_{ET}} \begin{Bmatrix} \hat{u}_1 \\ \hat{u}_2 \end{Bmatrix}. \quad (3.40)$$

### 3.1.4 Flexibilidade da Trinca

O princípio básico do comportamento de uma estrutura contendo uma trinca é a variação da rigidez em função das características da trinca, tais como tamanho, modo de abertura e orientação. A flexibilidade de uma estrutura na posição da trinca pode ser obtida usando-se o teorema de Castigliano (Tada *et al.* 2000):

$$c_{ij} = \frac{\partial^2 U_t}{\partial P_i \partial P_j}, \quad (3.41)$$

onde,  $U_t$  é a energia de deformação elástica causada pela presença da trinca e  $P$  indica as forças independentes que atuam sobre a estrutura.

A energia de deformação próximo à ponta da trinca pode ser associada a um modo de abertura da trinca conforme ilustrado na Figura 3.6. O modo de abertura I, está associado com os deslocamentos locais no qual as superfícies da trinca se movem separando uma da outra na direção normal as superfícies. O modo de abertura II ou de cisalhamento, é caracterizado pelos deslocamentos no qual as superfícies da trincas escorregam uma sobre a outra na direção  $y$ . No modo de abertura III ou de rasgamento, as superfícies da trinca escorregam uma sobre a outra na direção  $z$ .



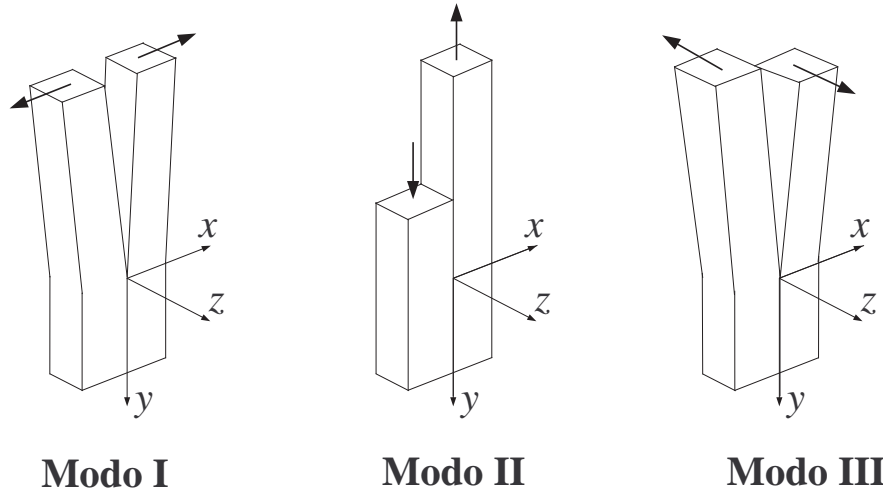


Figura 3.6: Modos fundamentais de deslocamento na superfícies da trinca.

Assim, a energia de deformação elástica devido à trinca pode ser expressa como (Tada *et al.* 2000):

$$U_t = \frac{1}{E} \int_{A_c} \{ (K_I(F) + K_I(M))^2 + K_{II}^2(Q_V) \} dA_c, \quad (3.42)$$

onde  $K_I$  e  $K_{II}$ , são os fatores de intensidade de tensão na ponta da trinca correspondentes aos dois modos de abertura da trinca;  $F$ ,  $M$  e  $Q_V$ , são as forças independente axial, momento e cortante, respectivamente, que atuam na estrutura . Para o caso da barra, só existirá o modo de abertura I. Logo, a Equação (3.42) pode ser re-escrita como:

$$U_t = \frac{1}{E} \int_{A_c} K_I^2 dA_c, \quad (3.43)$$

sendo  $A_c$  é a área da seção transversal trincada e  $K_I$  é o fator intensificação de tensão correspondente ao primeiro modo de fratura da trinca, ver Figura 3.6. O fator de intensidade de tensão é definido como:

$$K_I = \frac{F}{bh} \sqrt{\pi a} f\left(\frac{a}{h}\right), \quad (3.44)$$

onde  $a$  é a profundidade da trinca,  $f(\frac{a}{h})$  é uma função de correção e  $b$  e  $h$  são a base e a altura da secção transversal da barra, respectivamente. A função de correção para o fator de intensificação de tensão do modo I pode ser escrita como (Tada *et al.* 2000):

$$f\left(\frac{a}{h}\right) = \sqrt{\frac{\tan(\pi a/2h)}{\pi a/2h}} \left\{ \frac{0,752 + 2,02(a/h) + 0,37[1 - \sin(\pi a/2h)]^3}{\cos(\pi a/2h)} \right\}. \quad (3.45)$$

Substituindo a Equação (3.44) na Equação (3.42).

$$U_t = \frac{1}{E} \int_{A_c} \left[ \frac{F_1}{bh} \sqrt{\pi a} f\left(\frac{a}{h}\right) \right]^2 dA_c, \quad (3.46)$$

retirando da integral os termos que são independentes da área da seção transversal trincada,

$$U_t = \frac{1}{E} \left( \frac{F}{bh} \right)^2 \pi \int_{A_c} a f\left(\frac{a}{h}\right)^2 dA_c. \quad (3.47)$$

Pela Figura 3.5,  $A_c = ba$ . Logo  $dA_c = bda$ . Substituindo na Equação (3.47),

$$U_t = \frac{1}{E} \left( \frac{F}{bh} \right)^2 b\pi \int_0^a a f\left(\frac{a}{h}\right)^2 da, \quad (3.48)$$

Definindo uma variável adimensional  $\alpha$ :

$$\alpha = \frac{a}{h} \rightarrow a = h\alpha \rightarrow da = h d\alpha. \quad (3.49)$$

Substituindo o valor de  $\alpha$  na Equação (3.48):

$$U_t = \frac{1}{E} \left( \frac{F}{bh} \right)^2 b\pi \int_0^\alpha h\alpha f(\alpha)^2 h d\alpha, \quad (3.50)$$

re-escrevendo a Equação (3.50)

$$U_t = \frac{1}{E} \frac{F^2}{b} \pi \int_0^\alpha \alpha f(\alpha)^2 d\alpha. \quad (3.51)$$

De posse do valor da energia de deformação elástica, Equação (3.51), com a integral em função apenas do valor adimensional  $\alpha$ , pode ser encontrado o valor da flexibilidade na posição da trinca para a direção do eixo  $x$ , Equação (3.41).

$$c_{11} = \frac{\partial^2}{\partial P \partial P} \left[ \frac{1}{E} \frac{F^2}{b} \pi \int_0^\alpha \alpha f(\alpha)^2 d\alpha \right]. \quad (3.52)$$

As únicas forças nodais independentes que atuam na barra são as forças axiais  $F$ . Logo, derivando duas vezes em relação  $F$ , encontra-se:

$$c_{11} = \frac{2\pi}{Eb} \int_0^\alpha \alpha f(\alpha)^2 d\alpha. \quad (3.53)$$

Da Equação (3.35) ficou definido que  $\theta = cEA_S$ . Logo, pode se substituir o valor da flexibilidade na posição da trinca  $c_{11}$ , Equação (3.53), que equivale ao valor de  $c$  para a direção  $x$ .

$$\theta = Ebh \frac{2\pi}{Eb} \int_0^\alpha \alpha f(\alpha)^2 d\alpha. \quad (3.54)$$

Portanto, o valor de  $\theta$  para a teoria elementar de barra fica definido como:

$$\theta = 2\pi h \int_0^\alpha \alpha f(\alpha)^2 d\alpha. \quad (3.55)$$

## 3.2 Modelo de Love ou de Um Modo

A modelo de Love, ou modelo de barra de um modo, caracteriza um melhoramento sobre a teoria elementar mantendo a sua simplicidade. A contração transversal do efeito de Poisson devido à deformação longitudinal da barra é incluída na formulação. Desta forma, cada partícula da barra possui também uma componente da velocidade transversal, a qual adicionará mais um termo à energia cinética sem afetar a energia de deformação da barra. A formulação aqui apresentada é a mesma desenvolvida por Doyle (1997) para uma barra de comprimento  $L$ , seção transversal circular  $A_S$  e carregamentos e deslocamentos conforme mostrado na Figura 3.7.

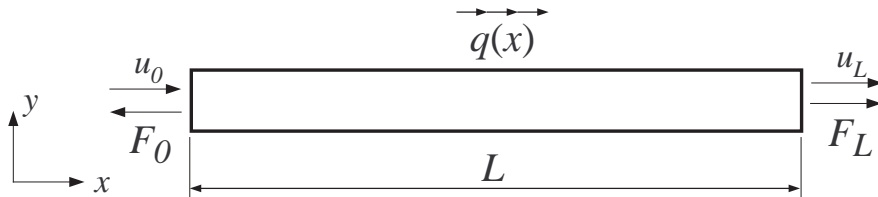


Figura 3.7: Modelo de barra de Love.

A deformação transversal,  $\varepsilon_t$ , está relacionada com a deformação axial  $\varepsilon$  por  $\varepsilon_t = -\nu\varepsilon$ . Portanto, a velocidade transversal da barra é dada por:

$$\dot{u}_t = r\dot{\varepsilon}_t = -\nu r\dot{\varepsilon} = -\nu r \frac{\partial \dot{u}}{\partial x}. \quad (3.56)$$

Desta forma, está sendo assumido que o deslocamento transversal é proporcional à distância  $r$  a partir do centróide da secção transversal. A energia cinética total da barra é determinada por (Tauchert 1974):

$$T = \int_V \frac{1}{2} \rho [\dot{u}(x, t)^2 + \dot{u}_t(x, t)^2] dV, \quad (3.57)$$

substituindo-se a Equação (3.56) na Equação (3.57) e re-escrevendo-a em função da área, obtém-se:

$$T = \frac{1}{2} \int_0^L \int_{A_S} \rho \left[ \dot{u}^2 + \nu^2 r^2 \left( \frac{\partial \dot{u}}{\partial x} \right)^2 \right] dA_S dx. \quad (3.58)$$

Como a área da secção transversal é constante ao longo do comprimento da barra, tem-se:

$$T = \frac{1}{2} \int_0^L \left[ \rho A_S \dot{u}^2 + \nu^2 \rho \underbrace{\int_{A_S} r^2 dA_S}_J \left( \frac{\partial \dot{u}}{\partial x} \right)^2 \right] dx, \quad (3.59)$$

onde  $J$  é o segundo momento polar de área. A energia total de deformação é dada por (Tauchert 1974):

$$U = \frac{1}{2} \int_0^L E A_S \left( \frac{\partial u}{\partial x} \right)^2 dx. \quad (3.60)$$

Considerando os carregamentos como mostrados na Figura 3.7, tem-se o potencial das forças aplicadas como:

$$V = - \int_0^L q(x) dx - (F_0 u_0 - F_L u_L) = - \int_0^L q(x) dx - F u|_0^L. \quad (3.61)$$

Do princípio de Hamilton tem-se que (Tauchert 1974):

$$\delta \int_{t_1}^{t_2} \{T - (U + V)\} dt = 0. \quad (3.62)$$

substituindo as Equações (3.59), (3.60) e (3.61) na Equação (3.62), obtém-se:

$$\delta \int_{t_1}^{t_2} \left\{ \frac{1}{2} \int_0^L \left[ \rho A_S \dot{u}^2 + \nu^2 \rho J \left( \frac{\partial \dot{u}}{\partial x} \right)^2 - E A_S \left( \frac{\partial u}{\partial x} \right)^2 \right] dx - \int_0^L q(x) dx - F u|_0^L \right\} dt = 0, \quad (3.63)$$

fazendo-se as variações internas,

$$\int_{t_1}^{t_2} \left\{ \int_0^L \left[ \rho A_S \dot{u} \delta \dot{u} + \nu^2 \rho J \frac{\partial \dot{u}}{\partial x} \frac{\partial \delta \dot{u}}{\partial x} - E A_S \frac{\partial u}{\partial x} \frac{\partial \delta u}{\partial x} \right] dx + F \delta u|_0^L \right\} dt = 0. \quad (3.64)$$

Integrando a Equação (3.64) por partes de modo a ter todos os termos multiplicados por uma variação comum  $\delta u$  obtém-se:

$$\int_{t_1}^{t_2} \left\{ \int_0^L \left[ E A_S \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \nu^2 \rho J \frac{\partial^2 \ddot{u}}{\partial x^2} - \rho A_S \ddot{u} \right] \delta u dx - \left[ E A_S \frac{\partial u}{\partial x} + \nu^2 \rho J \frac{\partial \ddot{u}}{\partial x} - F \right] \delta u|_0^L \right\} dt = 0. \quad (3.65)$$

Uma vez que os limites temporais e espaciais das integrações são arbitrários, o primeiro integrando é zero dando a equação diferencial que governa o movimento para  $u(x, t)$  como:

$$E A_S \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \nu^2 \rho J \frac{\partial^2 \ddot{u}}{\partial x^2} - \rho A_S \ddot{u} = 0. \quad (3.66)$$

Fica claro da Equação (3.66) que se o coeficiente de Poisson,  $\nu$ , ou o momento polar de inércia,  $J$ , forem muito pequenos a equação resume-se na Equação (3.7), ou seja, a equação de governo do modelo elementar de barra. O restante dos termos da Equação (3.65) devem também ser iguais a zero e definem as condições de contorno em cada extremidade da barra como:

$$u \text{ ou } F = E A_S \frac{\partial u}{\partial x} + \nu^2 \rho J \frac{\partial \ddot{u}}{\partial x}. \quad (3.67)$$

### 3.2.1 Elemento Espectral de Love

Re-escrevendo a Equação (3.66) em sua forma espectral, obtém-se:

$$E A_S \frac{d^2 \hat{u}}{dx^2} - \omega^2 \nu^2 \rho J \frac{d^2 \hat{u}}{dx^2} + \omega^2 \rho A_S \hat{u} = 0. \quad (3.68)$$

Agrupando os termos semelhantes produz-se,

$$(EA_S - \omega^2 \nu^2 \rho J) \frac{d^2 \hat{u}}{dx^2} + \omega^2 \rho A_S \hat{u} = 0. \quad (3.69)$$

Dividindo a Equação (3.69) por  $(EA_S - \omega^2 \nu^2 \rho J)$  obtém-se:

$$\frac{d^2 \hat{u}}{dx^2} + \underbrace{\frac{\omega^2 \rho A_S}{(EA_S - \omega^2 \nu^2 \rho J)}}_{k_L^2} \hat{u} = 0, \quad (3.70)$$

onde  $k_L$  é número de onda que, para a teoria de barra de Love, pode ser escrito como:

$$k_L = \pm \omega \sqrt{\frac{\rho A_S}{EA_S - \nu^2 \rho J \omega^2}}. \quad (3.71)$$

As velocidades de fase e de grupo podem ser escritas como:

$$c_{oL} = \frac{\omega}{k_L} = \pm \sqrt{\frac{EA_S - \nu^2 \rho J \omega^2}{\rho A_S}}, \quad (3.72)$$

$$c_g = \frac{d\omega}{dk_L} = \sqrt{\frac{E_c}{\rho}} \left[ 1 - \nu^2 \frac{\rho J \omega^2}{\rho A_S} \right]^{\frac{3}{2}}. \quad (3.73)$$

O mesmo modelo do elemento espectral de barra elástico com dois nós sujeito a forças internas dinâmicas em ambas as extremidades mostrado na Figura 3.2 pode ser usado para representar o elemento espectral de Love. Neste casos, também, um termo de amortecimento será introduzido na formulação usando-se um módulo de elasticidade complexo. Da solução homogênea da Equação (3.70) obtém-se o deslocamento longitudinal da barra como:

$$\hat{u}(x) = A e^{-ik_L x} + B e^{-ik_L(L-x)}. \quad (3.74)$$

Substituindo-se as condições de contorno de deslocamento nodais do elemento,  $u(0) = \hat{u}_1$  e  $\hat{u}(L) = \hat{u}_2$  na Equação (3.74) e escrevendo na forma matricial, obtém-se:

$$\begin{Bmatrix} A \\ B \end{Bmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & e^{-ik_L L} \\ e^{-ik_L L} & 1 \end{bmatrix}}_{\hat{\Psi}_L^{-1}}^{-1} \begin{Bmatrix} \hat{u}_1 \\ \hat{u}_2 \end{Bmatrix}. \quad (3.75)$$

Re-escrevendo a Equação (3.67) na forma espectral produz-se,

$$\hat{F} = (EA_S - \omega^2 \nu^2 \rho J) \frac{d\hat{u}}{dx}. \quad (3.76)$$

Substituindo-se a derivada espacial da Equação (3.74) na Equação (3.76), aplicando-se as condições de contorno de força nos nós do elemento ( $F(0) = F_1$  e  $F(L) = F_2$ ) e escrevendo na forma matricial, obtém-se:

$$\begin{Bmatrix} \hat{F}_1 \\ \hat{F}_2 \end{Bmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix} ik_L (-EA_S + \nu^2 \rho J \omega^2) & ik_L (-EA_S + \nu^2 \rho J \omega^2) e^{-ik_L L} \\ ik_L (-EA_S + \nu^2 \rho J \omega^2) e^{-ik_L L} & ik_L (-EA_S + \nu^2 \rho J \omega^2) \end{bmatrix}}_{\hat{\Phi}_L} \begin{Bmatrix} A \\ B \end{Bmatrix}. \quad (3.77)$$

Substituindo a Equação (3.75) na Equação (3.77), a relação entre as forças e os deslocamentos nodais pode ser obtida:

$$\begin{Bmatrix} \hat{F}_1 \\ \hat{F}_2 \end{Bmatrix} = \underbrace{\hat{\Phi}_L \hat{\Psi}_L^{-1}}_{\hat{\mathbf{K}}_L} \begin{Bmatrix} \hat{u}_1 \\ \hat{u}_2 \end{Bmatrix}. \quad (3.78)$$

onde  $\hat{\mathbf{K}}_L$ , é chamada de matriz de rigidez dinâmica do elemento espectral de barra de Love.

### 3.2.2 Elemento Espectral de Love Semi-Infinito

Da mesma forma que o modelo elementar, o elemento de Love semi-infinito pode ser obtido considerando que não existem reflexões na extremidade infinita do elemento, Figura 3.3. Desta forma, o termo  $B$  da Equação (3.74) torna-se nulo e o elemento de dois nós degenera em um elemento de um nó, obtendo-se uma nova equação do deslocamento da barra semi-infinita como:

$$\hat{u}(x) = Ae^{-ik_L x}. \quad (3.79)$$

A constante  $A$  pode ser determinada a partir da condição de contorno de deslocamento nodal:

$$\hat{u}(0) = \hat{u}_1 = A. \quad (3.80)$$

Substituindo-se a derivada espacial da Equação (3.79) na Equação (3.76), aplicando-se as condições de contorno de força nos nós do elemento,  $F(0) = F_1$ :

$$\hat{F}_1 = -ik_L (EA_S - w^2\nu^2\rho J)\hat{u}_1. \quad (3.81)$$

O termo  $-ik_L (EA_S - w^2\nu^2\rho J)$  da Equação (3.81) representa a rigidez dinâmica do elemento espectral semi-infinito, com base no modelo de Love.

### 3.2.3 Elemento Espectral de Love Trincado

O elemento contém dois nós com um grau de liberdade de deslocamento por nó, comprimento  $L$ , área da secção transversal  $A_S$ , posicionamento da trinca em relação ao nó 1  $L_1$ , e profundidade da trinca  $a$ , ver Figura 3.4. A solução homogênea da Equação (3.69),  $u(x)$ , pode ser re-escrita em duas partes, para a direita  $\hat{u}(x)^D$  e a esquerda  $\hat{u}(x)^E$  como:

$$\hat{u}(x)^E = A_1 e^{-ik_L x} + B_1 e^{-ik_L (L_1 - x)} \quad [0 \leq x \leq L_1] \quad (3.82)$$

$$\hat{u}(x)^D = A_2 e^{-ik_L (x + L_1)} + B_2 e^{-ik_L [L - (L_1 + x)]} \quad [0 \leq x \leq L - L_1] \quad (3.83)$$

onde  $A_1$ ,  $A_2$ ,  $B_1$  e  $B_2$  são constantes determinadas a partir das condições de contorno e de compatibilidade dos deslocamentos e forças no elemento. As condições de contorno podem ser escritas como:

Para o nó 1,  $x = 0$  na Equação (3.82) e obtém-se o deslocamento:

$$\hat{u}(0)^E = \hat{u}_1. \quad (3.84)$$

Para o nó 2,  $x = L - L_1$  na Equação (3.83) e obtém-se o deslocamento:

$$\hat{u}(L - L_1)^D = \hat{u}_2. \quad (3.85)$$

Na posição da trinca ( $x = L_1$  para  $\hat{u}(x)^E$  e  $x = 0$  para  $\hat{u}(x)^D$ )

$$\begin{aligned} \hat{u}(L_1)^E - \hat{u}(0)^D &= -\theta \frac{d\hat{u}(L_1)^E}{dx} \\ \frac{\partial \hat{u}(L_1)^E}{\partial x} &= \frac{\partial \hat{u}(0)^D}{\partial x} \end{aligned} \quad (3.86)$$



Substituindo as condições de contorno dadas pelas Equações (3.84), (3.86) e (3.85) na Equação (3.82) e escrevendo as constantes em função dos deslocamentos na forma matricial, obtém-se:

$$\begin{Bmatrix} A_1 \\ B_1 \\ A_2 \\ B_2 \end{Bmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & e^{-ik_L L_1} & 0 & 0 \\ (ik_L \theta - 1)e^{-ik_L L_1} & (-1 + ik_L \theta) & e^{-ik_L L_1} & e^{-ik_L(L-L_1)} \\ -ik_L e^{-ik_L L_1} & ik_L & ik_L e^{-ik_L L_1} & -ik_L e^{-ik_L(L-L_1)} \\ 0 & 0 & e^{-ik_L L_1} & 1 \end{bmatrix}}^{\hat{\Psi}_{LT}^{-1}}^{-1} \begin{Bmatrix} \hat{u}_1 \\ 0 \\ 0 \\ \hat{u}_2 \end{Bmatrix}. \quad (3.87)$$

As forças em cada nó do elemento espectral de barra trincada são  $\hat{F}_1 = \hat{F}(x=0)$  e  $\hat{F}_2 = \hat{F}(x=L)$ . Logo, pode se escrever a Equação (3.81) na forma matricial como:

$$\begin{Bmatrix} \hat{F}_1 \\ \hat{F}_2 \end{Bmatrix} = \underbrace{(EA_S - \nu^2 \rho J \omega^2) \begin{bmatrix} ik_L & -ik_L e^{-ik_L L_1} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -ik_L e^{-ik_L L_1} & ik_L \end{bmatrix}}_{\hat{\Phi}_{LT}} \begin{Bmatrix} A_1 \\ B_1 \\ A_2 \\ B_2 \end{Bmatrix}. \quad (3.88)$$

Substituindo-se a Equação (3.87) na Equação (3.88) obtém-se a matriz de rigidez dinâmica do elemento espectral de barra trincado com dois nós de Love,  $K_{LT}$ , como:

$$\begin{Bmatrix} \hat{F}_1 \\ \hat{F}_2 \end{Bmatrix} = \underbrace{\hat{\Phi}_{LT} \hat{\Psi}_{LT}^{-1}}_{\hat{\mathbf{K}}_{LT}} \begin{Bmatrix} \hat{u}_1 \\ \hat{u}_2 \end{Bmatrix}. \quad (3.89)$$

### 3.3 Modelo de Mindlin-Herrmann ou dos Dois Modos

O modelo de Mindlin-Herrmann (Mindlin e Herrmann 1950), ou modelo de barra dos dois modos, é apresentado na Figura 3.8. O deslocamento transversal devido ao efeito de Poisson é incluído na formulação, mas respeita o princípio da distribuição uniforme das tensões e das deformações axial nas seções transversais da barra .

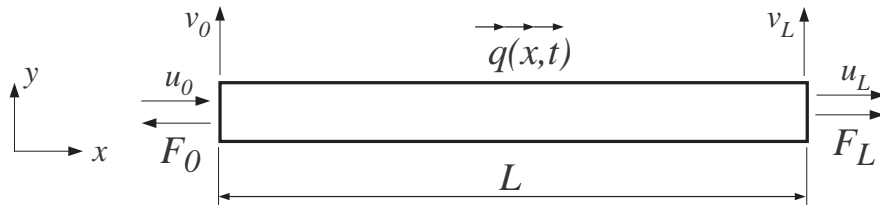


Figura 3.8: Forças e deslocamentos para uma barra de Mindlin-Herrmann.

A teoria de Mindlin-Herrmann tem dois graus de liberdade, o deslocamento longitudinal  $\bar{u}(x, y)$  e o deslocamento transversal  $\bar{v}(x, y)$  e podem ser assumidos como se segue, (Doyle 1997):

$$\begin{aligned}\bar{u}(x, y) &\approx u(x), \\ \bar{v}(x, y) &\approx \psi(x)y,\end{aligned}\tag{3.90}$$

onde  $\psi$  indica o efeito da contração transversal. Utilizando as Equações (3.90), para encontrar as deformações  $\varepsilon_{xx}$ ,  $\varepsilon_{yy}$  e  $\varepsilon_{xy}$ .

$$\varepsilon_{xx} = \frac{\partial u}{\partial x}, \quad \varepsilon_{yy} = \frac{\partial v}{\partial y} = \psi \quad \text{e} \quad \varepsilon_{xy} = \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} = \frac{\partial \psi}{\partial x} y.\tag{3.91}$$

Substituindo as Equações (3.91) nas Equações de tensão (Popov 1978):

$$\begin{aligned}\sigma_{xx} &= 2\mu\varepsilon_{xx} + \lambda(\varepsilon_{xx} + \varepsilon_{yy}) = 2\mu\frac{\partial u}{\partial x} + \lambda\left(\frac{\partial u}{\partial x} + \psi\right) = (2\mu + \lambda)\frac{\partial u}{\partial x} + \lambda\psi, \\ \sigma_{yy} &= 2\mu\varepsilon_{yy} + \lambda(\varepsilon_{xx} + \varepsilon_{yy}) = 2\mu\psi + \lambda\left(\frac{\partial u}{\partial x} + \psi\right) = \lambda\frac{\partial u}{\partial x} + (2\mu + \lambda)\psi, \\ \sigma_{xy} &= 2\mu\varepsilon_{xy} = 2\mu\frac{\partial \psi}{\partial x} y.\end{aligned}\tag{3.92}$$

Assim, substituindo as Equações (3.91) e (3.92) na Equação da energia de deformação (Tauchert 1974):

$$U = \frac{1}{2} \int_V A_S (\sigma_{xx}\varepsilon_{xx} + \sigma_{yy}\varepsilon_{yy} + \sigma_{xy}\varepsilon_{xy}) dV,\tag{3.93}$$

logo

$$U = \frac{1}{2} \int_0^L \left[ (2\mu + \lambda)A_S \left[ \left( \frac{\partial u}{\partial x} \right)^2 + \psi^2 \right] + 2\lambda A_S \frac{\partial u}{\partial x} \psi + 2\mu I \left( \frac{\partial \psi}{\partial x} \right)^2 \right] dx,\tag{3.94}$$

e substituindo as Equações (3.91) e (3.92) na Equação da energia cinética (Tauchert 1974):

$$T = \int_V \frac{1}{2} \rho [\dot{u}(x, t)^2 + \dot{v}(x, t)^2] dV = \frac{1}{2} \int_0^L \int_{A_S} \rho \left[ \dot{u}^2 + \left( \frac{\partial \psi(x)}{\partial t} y \right)^2 \right] dA_S dx,\tag{3.95}$$

logo

$$T = \frac{1}{2} \int_0^L \left[ \rho A_S \dot{u}(x)^2 + \rho I \dot{\psi}(x)^2 \right] dx, \quad (3.96)$$

onde  $I$  é momento de inércia de área. Se a barra sofre um carregamento como mostrado na Figura 3.8, os potenciais desses carregamentos são:

$$V = - \int_0^L q(x) v dx - Fv|_0^L - Q_1 \psi|_0^L. \quad (3.97)$$

Substituindo as Equações (3.94), (3.96) e (3.97) no princípio de Hamilton, Equação (3.62).

$$\begin{aligned} \delta \int_{t_1}^{t_2} \left\{ \left( \frac{1}{2} \int_0^L \left[ \rho A_S \dot{u}^2 + \rho I \dot{\psi}(x)^2 \right] dx \right) - \left( \left[ \frac{1}{2} \int_0^L (2\mu + \lambda) A_S \left[ \left( \frac{\partial u}{\partial x} \right)^2 + \psi^2 \right] + \dots \right. \right. \right. \\ \left. \left. \left. 2\lambda A_S \frac{\partial u}{\partial x} \psi + 2\mu I \left( \frac{\partial \psi}{\partial x} \right)^2 \right] dx \right) + \left( - \int_0^L q(x) v dx - Fv|_0^L - Q_1 \psi|_0^L \right) \right\} = 0. \end{aligned} \quad (3.98)$$

Aplicando a variação interna  $\delta$ , integrando por parte e agrupando os termos semelhantes, as equações de movimentos ficam assim definidas:

$$(2\mu + \lambda) A_S \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \lambda A_S \frac{\partial \psi}{\partial x} = \rho A_S \ddot{u}, \quad (3.99)$$

$$\mu I K r_I \frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} - (2\mu + \lambda) A_S \psi - \lambda A_S \frac{\partial u}{\partial x} = \rho I K r_{II} \ddot{\psi}, \quad (3.100)$$

onde  $Kr_I$  e  $Kr_{II}$  são constantes.

As condições de contorno são especificadas em termos das seguintes equações:

$$F = (2\mu + \lambda) A_S \frac{\partial u}{\partial x} + \lambda A_S \psi \quad \text{para} \quad u, \quad (3.101)$$

$$Q = \mu I K r_I \frac{\partial \psi}{\partial x} \quad \text{para} \quad \psi, \quad (3.102)$$

trata-se de um conjunto de Equações acopladas, envolvendo o deslocamento longitudinal  $u(x, t)$  e a contração transversal  $\psi(x, t)$ . A teoria elementar pode ser facilmente recuperada através da fixação de  $\mu IKr_I = 0$ ,  $\rho IKr_{II} = 0$  e substituindo  $\psi$  em termos de  $u$  na Equação (3.99). Os valores adotados de  $Kr_I$  e  $Kr_{II}$  em Krawczuk *et al.* (2006a) são:

$$Kr_I = \frac{12}{\pi^2}, \quad Kr_{II} = Kr_I \left( \frac{1 + \nu}{0.87 + 1.12\nu} \right)^2. \quad (3.103)$$

### 3.3.1 Elemento Espectral de Mindlin-Herrmann

Re-escrevendo as Equações (3.99) e (3.100) em sua forma espectral obtém-se:

$$(2\mu + \lambda)A_S \frac{\partial^2 \hat{u}}{\partial x^2} + \lambda A_S \frac{\partial \hat{\psi}}{\partial x} + \omega^2 \rho A_S \hat{u} = 0, \quad (3.104)$$

$$\mu IKr_I \frac{\partial^2 \hat{\psi}}{\partial x^2} - (2\mu + \lambda)A_S \hat{\psi} - \lambda A_S \frac{\partial \hat{u}}{\partial x} + \omega^2 \rho IKr_{II} \hat{\psi} = 0. \quad (3.105)$$

Uma vez que há duas variáveis dependentes  $\hat{u}$  e  $\hat{\psi}$  e os coeficientes são constantes, para obter a relação espectral as soluções devem assumir as seguintes forma:

$$\hat{u} = u_o e^{-i(k_M x - \omega t)}, \quad \hat{\psi} = \psi_o e^{-i(k_M x - \omega t)}. \quad (3.106)$$

Substituindo as soluções propostas, Equação (3.106), nas Equações (3.104) e (3.105) encontra-se o seguinte sistema:

$$\begin{bmatrix} -(2\mu + \lambda)A_S k_M^2 + \rho A_S \omega^2 & -ik_M \lambda A_S \\ ik_M \lambda A_S & -\mu IKr_I k_M^2 - (2\mu + \lambda)A_S + \rho IKr_{II} \omega^2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_o \\ \psi_o \end{Bmatrix} = 0. \quad (3.107)$$

Fazendo o determinante da matriz igual a zero, encontra-se a equação característica e assim é encontrado o valor do número de onda  $k_M$  para a teoria de Mindlin-Herrmann.

$$a_2 k_M^4 + a_1 k_M^2 + a_0 = 0, \quad (3.108)$$

onde:

$$\begin{aligned}
a_2 &= \mu A_S I K r_I (2\mu + \lambda), \\
a_1 &= \left[ 4\mu (\mu + \lambda) A_S^2 - \rho I K r_{II} \omega^2 (2\mu + \lambda) A_S - \rho A_S \omega^2 \mu I K r_I \right], \\
a_o &= -\rho A_S \omega^2 [A_S (2\mu + \lambda) - \rho I K r_{II} \omega^2].
\end{aligned} \tag{3.109}$$

Esta é uma equação característica quadrática em  $k_M^2$ . O valor de  $k_M^2$  pode ser facilmente encontrado pela formula de Bhaskara:

$$k_M^2 = \frac{-a_1 \pm \sqrt{a_1^2 - 4a_2a_o}}{2a_2}. \tag{3.110}$$

Segundo Doyle (1997), da solução da Equação (3.108) existem dois pares de modos em contraste com um único par observado nos modelos elementar e de Love. O comportamento do primeiro modo ( $k_{M1}$ ) é real apenas, enquanto o segundo modo é bem diferente. O segundo modo ( $k_{M2}$ ) apresenta uma frequência de corte,  $\omega_c$ , abaixo da qual  $k_{M2}$  é complexo, o que significa que o segundo modo é atenuado. Como a frequência de corte é inversamente proporcional a  $h$ , barras esbeltas apresentam um valor de  $\omega_c$  grande. Logo, para valores abaixo da frequência corte o segundo modo de propagação não é normalmente observado.

$$\omega_c = \sqrt{\frac{(2\mu + \lambda) A_S}{\rho I K r_{II}}}. \tag{3.111}$$

A Figura 3.9 mostra o modelo de Mindlin-Herrmann do elemento espectral de barra elástica com dois nós sujeito a forças internas dinâmicas em ambas as extremidades. Um termo de amortecimento será introduzido na formulação usando-se um módulo de elasticidade complexo,  $E_c = E(1 + i\eta)$ , onde  $\eta$  é o fator de perda para um amortecimento estrutural interno histerético.

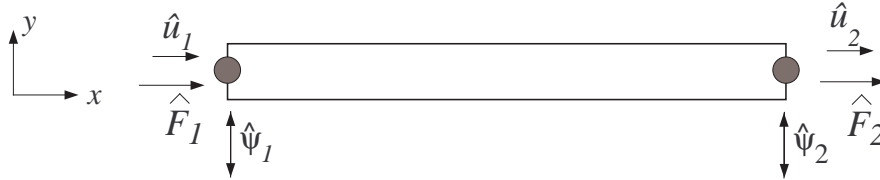


Figura 3.9: Modelo de Mindlin-Herrmann espectral de barra.

As soluções homogêneas das Equações (3.104) e (3.105) podem ser escritas como:

$$\begin{aligned}\hat{u}(x) &= AR_1 e^{-ik_{M1}x} + BR_2 e^{-ik_{M2}x} - CR_1 e^{-ik_{M1}(L-x)} - DR_2 e^{-ik_{M2}(L-x)}, \\ \hat{\psi}(x) &= Ae^{-ik_{M1}x} + Be^{-ik_{M2}x} + Ce^{-ik_{M1}(L-x)} + De^{-ik_{M2}(L-x)},\end{aligned}\quad (3.112)$$

onde  $R_i$  são as razões de amplitude para a Equação (3.107) e são dadas por:

$$R_i = \frac{ik_{Mi}\lambda A_S}{-(2\mu + \lambda)A_S k_{Mi}^2 + \rho A_S \omega^2}, \quad i = 1, 2. \quad (3.113)$$

As constantes  $A$ ,  $B$ ,  $C$  e  $D$  podem ser encontradas substituindo as condições de contorno de deslocamento nodais do elemento:

$$\begin{aligned}\hat{u}(0) &= \hat{u}_1, & \hat{\psi}(0) &= \hat{\psi}_1, \\ \hat{u}(L) &= \hat{u}_2, & \hat{\psi}(L) &= \hat{\psi}_2.\end{aligned}\quad (3.114)$$

que leva ao seguinte sistema de equações:

$$\begin{Bmatrix} A \\ B \\ C \\ D \end{Bmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix} R_1 & R_2 & -R_1 p_1 & -R_2 p_2 \\ 1 & 1 & p_1 & p_2 \\ R_1 p_1 & R_2 p_2 & -R_1 & -R_2 \\ p_1 & p_2 & 1 & 1 \end{bmatrix}}^{\hat{\Psi}_M^{-1}}^{-1} \begin{Bmatrix} \hat{u}_1 \\ \hat{\psi}_2 \\ \hat{u}_1 \\ \hat{\psi}_2 \end{Bmatrix}, \quad (3.115)$$

onde  $p_1 = e^{-ik_{M1}L}$  e  $p_2 = e^{-ik_{M2}L}$ .

Re-escrevendo as Equações (3.101) e (3.102) na forma espectral produz-se,

$$\hat{F} = (2\mu + \lambda)A_S \frac{\partial \hat{u}}{\partial x} + \lambda A_S \hat{\psi}, \quad (3.116)$$

$$\hat{Q} = \mu I K r_I \frac{\partial \hat{\psi}}{\partial x} \quad (3.117)$$

Substituindo-se a derivada espacial das Equações (3.112) nas Equações (3.116) e (3.117), aplicando-se as condições de contorno de força nos nós do elemento, ( $\hat{F}(0) = F_1$ ,  $\hat{F}(L) = \hat{F}_2$ ,  $\hat{Q}(0) = \hat{Q}_1$  e  $\hat{Q}(L) = \hat{Q}_2$ ) e escrevendo na forma matricial obtém-se:

$$\begin{Bmatrix} \hat{F}_1 \\ \hat{Q}_1 \\ \hat{F}_2 \\ \hat{Q}_2 \end{Bmatrix} = \hat{\Phi}_M \begin{Bmatrix} A \\ B \\ C \\ D \end{Bmatrix}, \quad (3.118)$$

onde:

$$\hat{\Phi}_M = \begin{bmatrix} -N_1 + M_2 & -N_2 + M_2 & (-N_1 + M_2)p_1 & (-N_2 + M_2)p_2 \\ -ik_{M1}M_3 & -ik_{M2}M_3 & +ik_{M1}M_3p_1 & +ik_{M2}M_3p_2 \\ (-N_1 + M_2)p_1 & (-N_2 + M_2)p_2 & -N_1 + M_2 & -N_2 + M_2 \\ -ik_{M1}M_3p_1 & -ik_{M2}M_3p_2 & ik_{M1}M_3 & ik_{M2}M_3 \end{bmatrix}.$$

sendo  $M_1 = (2\mu + \lambda)A_S$ ,  $M_2 = \lambda A_S$ ,  $M_3 = \mu IK_I$ ,  $N_1 = ik_{M1}M_1R_1$  e  $N_2 = ik_{M2}M_1R_2$ .

Substituindo a Equação (3.115) na Equação (3.118) a relação entre as forças e os deslocamentos nodais pode ser obtida:

$$\begin{Bmatrix} \hat{F}_1 \\ \hat{Q}_1 \\ \hat{F}_2 \\ \hat{Q}_2 \end{Bmatrix} = \underbrace{\hat{\Phi}_M \hat{\Psi}_M^{-1}}_{\hat{\mathbf{K}}_M} \begin{Bmatrix} \hat{u}_1 \\ \hat{\psi}_1 \\ \hat{u}_2 \\ \hat{\psi}_2 \end{Bmatrix}, \quad (3.119)$$

onde  $\hat{\mathbf{K}}_M$ , é chamada de matriz de rigidez dinâmica do elemento espectral de barra de Mindlin-Herrmann .

### 3.3.2 Elemento Espectral de Mindlin-Herrmann Semi-Infinito

A Figura 3.10 mostra um elemento espectral semi-infinito de barra para a teoria de Mindlin-Herrmann, este elemento pode ser pensado como um elemento espectral onde no qual não existem reflexões na extremidade infinita do elemento.

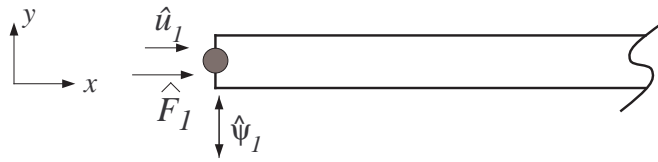


Figura 3.10: Modelo de Mindlin-Herrmann de elemento espectral de barra semi-infinito.

Desta forma, os termos  $C$  e  $D$  das Equações (3.112) tornam-se nulos e o elemento de dois nós degenera em um elemento de um nó, obtendo-se novas equações dos deslocamento da barra semi-infinita como:

$$\begin{aligned} \hat{u}(x) &= AR_1 e^{-ik_{M1}x} + BR_2 e^{-ik_{M2}x} \\ \hat{\psi}(x) &= Ae^{-ik_{M1}x} + Be^{-ik_{M2}x} \end{aligned} \quad (3.120)$$

As constantes  $A$  e  $B$  podem ser encontradas partir das seguintes condições nodais:

$$\hat{u}(0) = \hat{u}_1, \quad \hat{\psi}(0) = \hat{\psi}_1. \quad (3.121)$$

que pode ser transformado no seguinte sistema:

$$\left\{ \begin{array}{c} A \\ B \end{array} \right\} = \underbrace{\left[ \begin{array}{cc} R_1 & R_2 \\ 1 & 1 \end{array} \right]^{-1}}_{\hat{\Psi}_{MS}^{-1}} \left\{ \begin{array}{c} \hat{u}_1 \\ \hat{\psi}_1 \end{array} \right\}. \quad (3.122)$$

Substituindo-se as Equações (3.120) nas Equações (3.101) e (3.102), aplicando-se as condições de contorno de força nos nós do elemento,  $\hat{F}(0) = \hat{F}_1$  e  $\hat{Q}(0) = \hat{Q}_1$ :

$$\left\{ \begin{array}{c} \hat{F}_1 \\ \hat{Q}_1 \end{array} \right\} = \underbrace{\left[ \begin{array}{cc} -N_1 + M_2 & -N_2 + M_2 \\ -ik_{M1}M_3 & -ik_{M2}M_3 \end{array} \right]}_{\hat{\Phi}_{MS}} \left\{ \begin{array}{c} A \\ B \end{array} \right\}, \quad (3.123)$$

onde  $M_1 = (2\mu + \lambda)A_S$ ,  $M_2 = \lambda A_S$  e  $M_3 = \mu IK_I$ ,  $N_1 = ik_{M1}M_1R_1$  e  $N_2 = ik_{M2}M_1R_2$ .

Substituindo a Equação (3.122) na Equação (3.123) encontra-se a matriz de rigidez dinâmica para o elemento espectral semi-infinito de barra baseado na teoria de Mindlin-Herrmann,  $\hat{\mathbf{K}}_{MS}$ .

$$\left\{ \begin{array}{c} \hat{F}_1 \\ \hat{Q}_1 \end{array} \right\} = \underbrace{\hat{\Phi}_{MS} \hat{\Psi}_{MS}^{-1}}_{\hat{\mathbf{K}}_{MS}} \left\{ \begin{array}{c} \hat{u}_1 \\ \hat{\psi}_1 \end{array} \right\} \quad (3.124)$$

### 3.3.3 Elemento Espectral de Mindlin-Herrmann Trincado

A Figura 3.11 mostra o modelo do elemento espectral de barra finito com uma trinca transversal não propagante em posição arbitrária ao longo do elemento (Palacz e Krawczuk 2002). O elemento contém dois nós com dois grau de liberdade de deslocamento por nó: o deslocamento longitudinal,  $\hat{u}(x)$ , a contração  $\hat{\psi}(x)$ . O elemento possui comprimento  $L$ , área da secção transversal  $A_S$ , o posicionamento da trinca em relação ao nó 1 é  $L_1$ , e a profundidade da trinca é  $a$ .

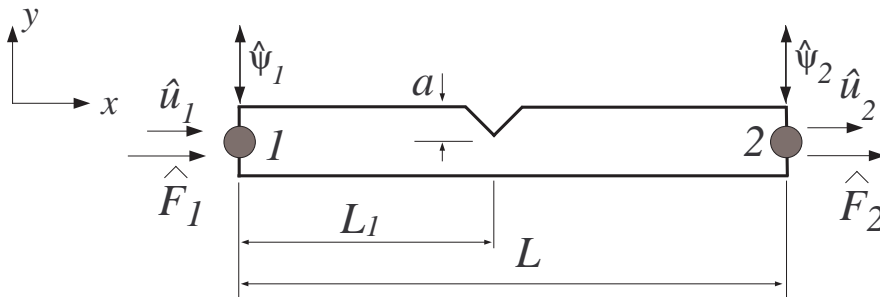


Figura 3.11: Modelo do elemento espectral de barra trincada para a teoria de Mindlin-Herrmann



As soluções homogêneas das Equações (3.104) e (3.105) podem ser re-escritas em duas partes, uma à esquerda da trinca,  $\hat{u}(x)^E$  e  $\hat{\psi}(x)^E$ , e outra à direita da trinca,  $\hat{u}(x)^D$  e  $\hat{\psi}(x)^D$ , respectivamente,

Para  $0 \leq x \leq L_1$

$$\begin{aligned}\hat{u}(x)^E &= A_1 R_1 e^{-ik_{M1}x} + B_1 R_2 e^{-ik_{M2}x} - C_1 R_1 e^{-ik_{M1}(L_1-x)} - D_1 R_2 e^{-ik_{M2}(L_1-x)}, \\ \hat{\psi}(x)^E &= A_1 e^{-ik_{M1}x} + B_1 e^{-ik_{M2}x} + C_1 e^{-ik_{M1}(L_1-x)} + D_1 e^{-ik_{M2}(L_1-x)}.\end{aligned}\tag{3.125}$$

Para  $0 \leq x \leq L - L_1$

$$\begin{aligned}\hat{u}(x)^D &= A_2 R_1 e^{-ik_{M1}(L_1+x)} + B_2 R_2 e^{-ik_{M2}(L_1+x)} - C_2 R_1 e^{-ik_{M1}[L-(L_1+x)]} - D_2 R_2 e^{-ik_{M2}[L-(L_1+x)]}, \\ \hat{\psi}(x)^D &= A_2 e^{-ik_{M1}(L_1+x)} + B_2 e^{-ik_{M2}(L_1+x)} + C_2 e^{-ik_{M1}[L-(L_1+x)]} + D_2 e^{-ik_{M2}[L-(L_1+x)]}.\end{aligned}\tag{3.126}$$

onde  $R_i$  são as razões de amplitude que são definidas pela Equação (3.107) como:

$$R_i = \frac{ik_i \lambda A}{-(2\mu + \lambda) A k_i^2 + \rho A \omega^2}, \quad i = 1, 2.\tag{3.127}$$

onde,  $A_1$ ,  $A_2$ ,  $B_1$ ,  $B_2$ ,  $C_1$ ,  $C_2$ ,  $D_1$  e  $D_2$  são constantes determinadas a partir das condições de contorno e de compatibilidade dos deslocamentos e forças no elemento. As condições de contorno podem ser escritas como:

Para o nó 1,  $x = 0$  nas Equações (3.125) e obtém-se os deslocamentos:

$$\hat{u}(0)^E = \hat{u}_1, \quad \hat{\psi}(0)^E = \hat{\psi}_1\tag{3.128}$$

Para o nó 2,  $x = L - L_1$  nas Equações (3.126) e obtém-se os deslocamentos:

$$\hat{u}(L - L_1)^D = \hat{u}_2, \quad \hat{\psi}(L - L_1)^D = \hat{\psi}_2\tag{3.129}$$

onde  $\hat{u}_1$ ,  $\hat{u}_2$  denotam os deslocamentos nodais,  $\hat{\psi}_1$ ,  $\hat{\psi}_2$  são as rotações nodais.

As condições de compatibilidade na posição da trinca podem ser determinadas em função do comportamento dos deslocamentos na região trincada. A Figura 3.5 mostra um detalhe da seção transversal da barra na região trincada onde observa-se que existem duas áreas bem definidas, uma onde a trinca foi propagada e outra que permanece saudável. Na área da secção transversal da

barra trincada os deslocamentos nos lados esquerdo e direito da posição da trinca são diferentes. Assim, essa diferença pode ser escrita como:

$$\hat{u}(L_1)^E - \hat{u}(0)^D = \Delta\hat{u}. \quad (3.130)$$

Sabendo-se que:

$$\Delta\hat{u} = c\hat{F}, \quad (3.131)$$

Substituindo a Equação (3.53) e Equação (3.116) na Equação (3.131):

$$\Delta\hat{u} = \frac{2\pi A_S}{Eb} \int_0^a \alpha f(\alpha)^2 d\alpha \left( (2\mu + \lambda) \frac{\partial\hat{u}}{\partial x} + \lambda\hat{\psi} \right), \quad (3.132)$$

arrumando o valor de  $\Delta\hat{u}$

$$\Delta\hat{u} = \frac{2\pi h}{E} \int_0^a \alpha f(\alpha)^2 d\alpha \left( (2\mu + \lambda) \frac{\partial\hat{u}}{\partial x} + \lambda\hat{\psi} \right). \quad (3.133)$$

Assim o valor de  $\theta^*$  é definido para a teoria de barra de Mindlin-Herrmann.

$$\theta^* = \frac{2\pi h}{E} \int_0^a \alpha f(\alpha)^2 d\alpha. \quad (3.134)$$

Re-escrevendo a Equação (3.130) em Função de  $\theta^*$

$$\hat{u}(L_1)^E - \hat{u}(0)^D = \theta^* \left( (2\mu + \lambda) \frac{\partial\hat{u}}{\partial x} + \lambda\hat{\psi} \right). \quad (3.135)$$

Na posição da trinca ( $x = L_1$  para  $\hat{u}(x)^E$ ,  $\hat{\psi}(x)^E$  e  $x = 0$  para  $\hat{u}(x)^D$ ,  $\hat{\psi}(x)^D$ )

$$\hat{u}(0)^D - \hat{u}(L_1)^E = \theta^* \left( (2\mu + \lambda) \frac{\partial\hat{u}(L_1)^E}{\partial x} + \lambda\hat{\psi}(L_1)^E \right), \quad (3.136)$$

$$(2\mu + \lambda)A_S \frac{\partial\hat{u}(L_1)^E}{\partial x} + \lambda A_S \hat{\psi}(L_1)^E = (2\mu + \lambda)A_S \frac{\partial\hat{u}(0)^D}{\partial x} + \lambda A_S \hat{\psi}(0)^D, \quad (3.137)$$

$$\hat{\psi}(L_1)^E = \hat{\psi}(0)^D, \quad (3.138)$$

$$\frac{\partial \hat{\psi}(L_1)^E}{\partial x} = \frac{\partial \hat{\psi}(0)^D}{\partial x}. \quad (3.139)$$

Aplicando as Equações (3.125) e (3.126) nas Equações (3.128), (3.128) e nas Equações (3.136) – (3.139) as constantes  $A_1$ ,  $B_1$ ,  $C_1$ ,  $D_1$ ,  $A_2$ ,  $B_2$ ,  $C_2$  e  $D_2$  podem ser expressas em função dos deslocamentos nodais.

$$\begin{Bmatrix} A_1 \\ B_1 \\ C_1 \\ D_1 \\ A_2 \\ B_2 \\ C_2 \\ D_2 \end{Bmatrix} = \hat{\Psi}_{MT}^{-1} \begin{Bmatrix} \hat{u}_1 \\ \hat{\psi}_1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ \hat{u}_2 \\ \hat{\psi}_2 \end{Bmatrix}, \quad (3.140)$$

onde

$$\hat{\Psi}_{MT}^{-1} = \begin{bmatrix} R_1 & R_2 & -p_{L1}R_1 & -p_{L2}R_2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & p_{L1} & p_{L2} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ P_{L1}M_{t1} & P_{L2}M_{t2} & R_1 + \theta^*T_1 & R_2 + \theta^*T_2 & p_{L1}R_1 & p_{L2}R_2 & -p_{d1}R_1 & -p_{d2}R_2 \\ A_S p_{L1}T_1 & A_S p_{L2}T_2 & A_S T_1 & A_S T_2 & -A_S p_{L1}T_1 & -A_S p_{L2}T_2 & -A_S p_{d1}T_1 & -A_S p_{d2}T_2 \\ p_{L1} & p_{L2} & 1 & 1 & -p_{L1} & -p_{L2} & -p_{d1} & -p_{d2} \\ -ip_{L1}k_{M1} & -ip_{L2}k_{M2} & ik_{M1} & ik_{M2} & ip_{L1}k_{M1} & ip_{L2}k_{M2} & -ip_{d1}k_{M1} & -ip_{d2}k_{M2} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & p_1R_1 & p_2R_2 & -R_1 & -R_2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & p_1 & p_2 & 1 & 1 \end{bmatrix}, \quad (3.141)$$

e:

$$\begin{aligned} p_1 &= e^{-iLk_{M1}}, \\ p_2 &= e^{-iLk_{M2}}, \\ p_{L1} &= e^{-iL1k_{M1}}, \\ p_{L2} &= e^{-iL1k_{M2}}, \\ p_{d1} &= e^{(-i(L-L1)K_{M1})}, \\ p_{d2} &= e^{(-i(L-L2)K_{M2})}, \\ M_{t1} &= (-R_1 + \theta^*T_1), \\ M_{t2} &= (-R_2 + \theta^*T_2), \\ T_1 &= (\lambda - iR_1(\lambda + 2\mu)k_{M1}) \quad \text{e} \\ T_2 &= (\lambda - iR_2(\lambda + 2\mu)k_{M2}). \end{aligned}$$

As forças espectrais nodais para o modelo de Mindlin-Herrmann são definidas pelas Equações (3.116) e (3.117).

Na extremidade esquerda ( $x = 0$ ), tem-se:

$$\hat{F}_1 = (2\mu + \lambda)A \frac{\partial \hat{u}(0)^E}{\partial x} + \lambda A \hat{\psi}(0)^E \quad \text{e} \quad \hat{Q}_1 = \mu I K_I \frac{\partial \hat{\psi}(0)^E}{\partial x}. \quad (3.142)$$

Na extremidade direita ( $x = (L - L_1)$ ), tem-se:

$$\hat{F}_2 = (2\mu + \lambda)A \frac{\partial \hat{u}(L - L_1)^D}{\partial x} + \lambda A \hat{\psi}(L - L_1)^D \quad \text{e} \quad \hat{Q}_2 = \mu I K_I \frac{\partial \hat{\psi}(L - L_1)^D}{\partial x}. \quad (3.143)$$

que pode ser escrito com:

$$\begin{pmatrix} \hat{F}_1 \\ \hat{Q}_1 \\ \hat{F}_2 \\ \hat{Q}_2 \end{pmatrix} = \hat{\Phi}_{MT} \begin{pmatrix} A_1 \\ B_1 \\ C_1 \\ D_1 \\ A_2 \\ B_2 \\ C_2 \\ D_2 \end{pmatrix}, \quad (3.144)$$

onde:

$$\hat{\Phi}_{MT} = \begin{bmatrix} M_2 - iM_1 R_1 k_{M1} & M_2 - iM_1 R_1 k_{M1} & p_{L1} (M_2 - iM_1 R_1 k_{M1}) & p_{L2} (M_2 - iM_1 R_1 k_{M2}) & \dots \\ -iM_3 k_{M1} & -iM_3 k_{M1} & p_{L1} M_3 k_{M1} & p_{L2} M_3 k_{M2} & \dots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots \\ p_1 (M_2 - iM_1 R_1 k_{M1}) & p_2 (M_2 - iM_1 R_1 k_{M2}) & M_2 - iM_1 R_1 k_{M1} & M_2 - iM_1 R_2 k_{M2} & \dots \\ -ip_1 M_3 k_{M1} & -ip_2 M_3 k_{M2} & iM_3 k_{M1} & iM_3 k_{M2} & \dots \end{bmatrix}. \quad (3.145)$$

onde,  $M_1 = (2\mu + \lambda)A_S$ ,  $M_2 = \lambda A_S$  e  $M_3 = I\mu K_I$ . Substituindo-se a Equação (3.140) na Equação (3.145) obtém-se a rigidez dinâmica de um elemento espectral de barra trincado para a teoria de Mindlin-Herrmann,  $\hat{\mathbf{K}}_{MT}$ :

$$\begin{pmatrix} \hat{F}_1 \\ \hat{Q}_1 \\ \hat{F}_2 \\ \hat{Q}_2 \end{pmatrix} = \underbrace{\hat{\Phi}_{MT} \hat{\Psi}_{MT}^{-1}}_{\hat{\mathbf{K}}_{MT}} \begin{pmatrix} \hat{u}_1 \\ \hat{\psi}_1 \\ \hat{u}_2 \\ \hat{\psi}_2 \end{pmatrix}. \quad (3.146)$$

### 3.4 Modelo dos Três Modos ou de Mindlin-McNiven

Desenvolvido por Mindlin e McNiven (1960) e denominado de “modelo dos três modos”, consiste de uma evolução do modelo de Mindlin-Herrmann onde foi incluído mais uma função com distribuição parabólica para as deformações axiais da secção transversal da barra. O modelo de barra com três modos também tem a mesma geometria das barras anteriores (Figura 3.12).

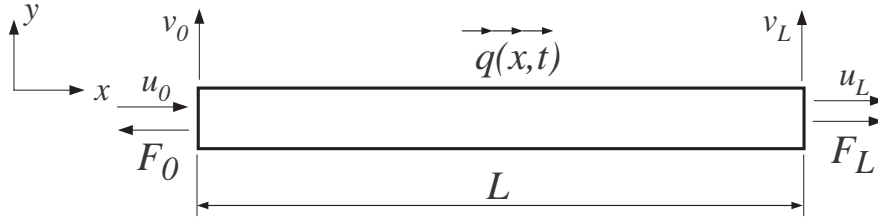


Figura 3.12: Forças e deslocamentos para o modelo de barra dos três modos

Os deslocamentos na teoria dos três modos são assumidos como (Doyle 1997):

$$\begin{aligned}\bar{u}(x, y) &= u(x) + \phi(x)h(1 - 12y^2/h^2), \\ \bar{v}(x, y) &= \psi(x)y\end{aligned}\tag{3.147}$$

onde  $\phi(x)$  é uma função que descreve uma distribuição parabólica do deslocamento axial ao longo da altura da barra, e  $h$  denota a altura da barra, desta forma,  $u(x)$  significa a média do deslocamento axial. Utilizando as Equações (3.147) para encontrar as deformações  $\varepsilon_{xx}$ ,  $\varepsilon_{yy}$  e  $\varepsilon_{xy}$ .

$$\begin{aligned}\varepsilon_{xx} &= \frac{\partial \bar{u}}{\partial x} = \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial \phi}{\partial x}h(1 - 12\frac{y^2}{h^2}), \\ \varepsilon_{yy} &= \frac{\partial \bar{v}}{\partial y} = \psi \quad \text{e} \\ \varepsilon_{xy} &= \frac{\partial \bar{u}}{\partial y} + \frac{\partial \bar{v}}{\partial x} = \left(-\phi 24\frac{y}{h} + \frac{\partial \psi}{\partial x}\right)y.\end{aligned}\tag{3.148}$$

Substituindo as Equações (3.148) na Equação da tensão (Popov 1978):

$$\begin{aligned}\sigma_{xx} &= 2\mu\varepsilon_{xx} + \lambda(\varepsilon_{xx} + \varepsilon_{yy}) = 2\mu\frac{\partial u}{\partial x} + \lambda\left(\frac{\partial u}{\partial x} + \psi\right) = (2\mu + \lambda)\frac{\partial u}{\partial x} + \lambda\psi, \\ \sigma_{yy} &= 2\mu\varepsilon_{yy} + \lambda(\varepsilon_{xx} + \varepsilon_{yy}) = 2\mu\psi + \lambda\left(\frac{\partial u}{\partial x} + \psi\right) = \lambda\frac{\partial u}{\partial x} + (2\mu + \lambda)\psi,\end{aligned}\tag{3.149}$$

$$\sigma_{xy} = 2\mu\varepsilon_{xy} = 2\mu\frac{\partial\psi}{\partial x}y,$$

assim substituir as Equações (3.148) e (3.149) nas Equações da energia de deformação e da energia de cinética (Tauchert 1974). Energia de deformação:

$$U = \frac{1}{2} \int_V (\sigma_{xx}\varepsilon_{xx} + \sigma_{yy}\varepsilon_{yy} + \sigma_{xy}\varepsilon_{xy}) dV, \quad (3.150)$$

logo

$$U = \frac{1}{2} \int_0^L \left\{ (2\mu + \lambda)A_S \left[ \left( \frac{\partial u}{\partial x} \right)^2 + \frac{4}{5}h^2 \left( \frac{\partial \phi}{\partial x} \right)^2 + \psi^2 \right] + 2\lambda A_S \frac{\partial u}{\partial x} \psi \dots \right. \\ \left. + \mu I \left[ \frac{\partial \psi}{\partial x} - 24 \frac{\phi}{h} \right]^2 \right\} dx. \quad (3.151)$$

A energia cinética total:

$$T = \frac{1}{2} \int_0^L \left[ \rho A_S \dot{u}^2 + \rho A_S \frac{4}{5} h^2 \dot{\phi}^2 + \rho I \dot{\psi}^2 \right] dx. \quad (3.152)$$

Se a barra sofre um carregamento como mostrado na Figura 3.12, os potenciais desses carregamentos são:

$$V = - \int_0^L q(x)u dx - F u|_0^L - Q \psi|_0^L - H \phi|_0^L, \quad (3.153)$$

onde os termos resultantes  $Q$  e  $H$  são associados com os graus de liberdade  $\psi$  e  $\phi$ , respectivamente. Depois de usar o princípio de Hamilton, Equação (3.62), obtém-se as equações de movimento para o modelo dos três modos:

$$(2\mu + \lambda)A_S \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \lambda A \frac{\partial \psi}{\partial x} = \rho A \ddot{u} - q, \quad (3.154)$$

$$\mu I \frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} - (2\mu + \lambda) A_S \psi - \lambda A_S \frac{\partial u}{\partial x} - 2\mu A_S h \frac{\partial \phi}{\partial x} = \rho I \ddot{\psi}, \quad (3.155)$$

$$(2\mu + \lambda) I \frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} - 5\mu A_S \phi + \frac{10}{48} \mu A_S h \frac{\partial \psi}{\partial x} = \rho I \ddot{\phi}. \quad (3.156)$$

As condições de contorno associadas, para cada extremidade da barra, são especificadas em termos das seguintes equações:

$$F = (2\mu + \lambda) A \frac{\partial u}{\partial x} + \lambda A \psi \quad \text{para} \quad u \quad (3.157)$$

$$Q = \mu I \left( \frac{\partial \psi}{\partial x} - 24 \frac{\phi}{h} \right) \quad \text{para} \quad \psi \quad (3.158)$$

$$H = \frac{48}{5} (2\mu + \lambda) I \frac{\partial \phi}{\partial x} \quad \text{para} \quad \phi \quad (3.159)$$

### 3.4.1 Elemento Espectral dos Três Modos

Re-escrevendo as Equações (3.154), (3.155) e (3.156) em sua forma espectral, obtém-se:

$$(2\mu + \lambda) A_S \frac{\partial^2 \hat{u}}{\partial x^2} + \lambda A \frac{\partial \hat{\psi}}{\partial x} + \omega^2 \rho A \hat{u} = 0, \quad (3.160)$$

$$\mu I \frac{\partial^2 \hat{\psi}}{\partial x^2} - (2\mu + \lambda) A_S \hat{\psi} - \lambda A_S \frac{\partial \hat{u}}{\partial x} - 2\mu A_S h \frac{\partial \hat{\phi}}{\partial x} + \omega^2 \rho I \hat{\psi} = 0, \quad (3.161)$$

$$(2\mu + \lambda) I \frac{\partial^2 \hat{\phi}}{\partial x^2} - 5\mu A_S \hat{\phi} + \frac{10}{48} \mu A_S h \frac{\partial \hat{\psi}}{\partial x} + \omega^2 \rho I \hat{\phi} = 0. \quad (3.162)$$

Uma vez que há três variáveis independentes  $\hat{u}$ ,  $\hat{\psi}$ ,  $\hat{\phi}$  e os coeficientes são constantes, para obter a relação espectral, as soluções devem ser assumidas da seguinte forma:

$$\hat{u} = u_o e^{-i(k_T x - \omega t)}, \quad \hat{\psi} = \psi_o e^{-i(k_T x - \omega t)}, \quad \text{e} \quad \hat{\phi} = \phi_o e^{-i(k_T x - \omega t)} \quad (3.163)$$

Substituindo as soluções propostas, Equações (3.163), nas Equações (3.154), (3.155) e (3.156), encontra-se o seguinte sistema de equações:

$$\begin{bmatrix} -(2\mu + \lambda) A_S k_T^2 + \rho A_S \omega^2 & -ik_T \lambda A_S & 0 \\ ik_T \lambda A_S & -\mu I k_T^2 - (2\mu + \lambda) A_S + \rho I \omega^2 & 2ik_T \mu A_S h \\ 0 & -\frac{10}{48} i \mu A_S h & -(2\mu + \lambda) I k_T^2 - 5\mu A_S + \rho I \omega^2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_o \\ \psi_o \\ \phi_o \end{Bmatrix} = 0.$$

(3.164)

Fazendo o determinante da matriz igual a zero encontra-se a equação característica e, assim acha-se o número de onda  $k_T$  para a teoria dos três modos. De acordo com o Teorema de Abel-Ruffini, as raízes de polinômios de grau superiores a quatro não podem ser determinadas como uma expressão algébrica, uma vez que uma raiz não pode ser expressa como um número finito de adições, subtrações, multiplicações, divisões, e operações de radiciação, logo os valores de  $k_T^2$  devem ser encontrados numericamente,

$$a_3 k_T^6 + a_2 k_T^4 + a_1 k_T^2 + a_0 = 0. \quad (3.165)$$

onde:

$$\begin{aligned} a_3 &= -A_S I^2 \mu (2\mu + \lambda)^2, \\ a_2 &= -A_S I (2\mu + \lambda) [4A_S \mu (\mu + \lambda) - I(4\mu + \lambda) \rho \omega^2], \\ a_1 &= A_S [-20A_S^2 \mu^2 (\mu + \lambda) + A_S I (\lambda^2 + 13\lambda\mu + 18\mu^2) \rho \omega^2 - I^2 (5\mu + 2\lambda) \rho^2 \omega^4], \\ a_0 &= \rho A_S \omega^2 (5A_S \mu - \rho I \omega^2) [A(2\mu + \lambda) - \rho I \omega^2]. \end{aligned} \quad (3.166)$$

Segundo Doyle (1997), da solução da Equação (3.165) existem três pares de modos em contraste com um único par observado nos modelos elementar e de Love e dois pares de modos no modelo Mindlin-Herrmann. O comportamento do primeiro modo ( $k_{T1}$ ) é real apenas, enquanto o segundo e terceiro modos são bem diferentes. Esses modos de propagação ( $k_{T2}$  e  $k_{T3}$ ) apresentam frequências de corte,  $\omega_c$ , abaixo das quais são atenuados. Como as frequências de corte são inversamente proporcionais a  $h$ , barras esbeltas apresentam valores de  $\omega_c$  grandes. Logo, para valores abaixo da frequência corte o segundo e o terceiro modos de propagação não são normalmente observados.

$$\omega_c = \sqrt{\frac{5\mu A_S}{\rho I}}, \quad \sqrt{\frac{(2\mu + \lambda) A_S}{\rho I}}. \quad (3.167)$$

A Figura 3.9 mostra um elemento espectral de barra para o modelo dos três modos sujeito a forças internas dinâmicas em ambas as extremidades. O referido elemento tem dois nós e três graus de liberdade por nó, o deslocamento longitudinal, uma contração e um abaulamento parabólica. Um termo de amortecimento será introduzido na formulação usando-se um módulo de elasticidade



complexo,  $E_c = E(1 + i\eta)$ , onde  $\eta$  é o fator de perda para um amortecimento estrutural interno histerético.

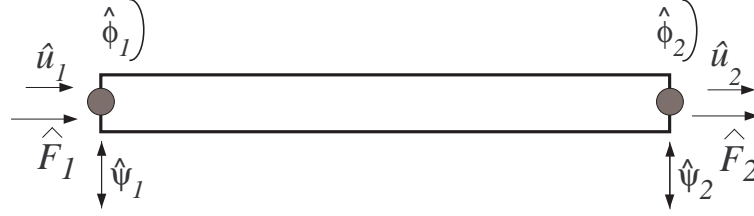


Figura 3.13: Modelo espectral de barra para a teoria dos Três Modos.

Os deslocamentos da barra podem ser escritas como:

$$\begin{aligned}\hat{u}(x) &= AR_4e^{-ik_{T1}x} + BR_5e^{-ik_{T2}x} + CR_6e^{-ik_{T3}x} + DR_4e^{-ik_{T1}(L-x)} + XR_5e^{-ik_{T2}(L-x)} + YR_6e^{-ik_{T3}(L-x)}, \\ \hat{\psi}(x) &= AR_1e^{-ik_{T1}x} + BR_2e^{-ik_{T2}x} + CR_3e^{-ik_{T3}x} - DR_1e^{-ik_{T1}(L-x)} - XR_2e^{-ik_{T2}(L-x)} - YR_3e^{-ik_{T3}(L-x)}, \\ \hat{\phi}(x) &= Ae^{-ik_{T1}x} + Be^{-ik_{T2}x} + Ce^{-ik_{T3}x} + De^{-ik_{T1}(L-x)} + Xe^{-ik_{T2}(L-x)} + Ye^{-ik_{T3}(L-x)},\end{aligned}\quad (3.168)$$

onde  $R_{Ti}$  são as razões de amplitude para a equação (3.164) e são definidas por:

$$\begin{aligned}R_i &= \frac{(2\mu + \lambda)Ik_{Ti}^2 + 5\mu A_S - \rho I\omega^2}{-\frac{10}{45}i\mu A_S h}, \quad i = 1, 2, 3, \\ R_j &= \frac{ik_{Ti}\lambda A_S}{-(2\mu + \lambda)A_S k_{Ti}^2 + \rho A_S \omega^2} R_i, \quad j = 4, 5, 6 \quad \text{e} \quad i = 1, 2, 3.\end{aligned}\quad (3.169)$$

as constantes  $A$ ,  $B$ ,  $C$ ,  $D$ ,  $X$  e  $Y$  podem ser encontradas a partir das seguintes condições nodais:

$$\begin{aligned}\hat{u}(x=0) &= \hat{u}_1, & \hat{\psi}(x=0) &= \hat{\psi}_1, & \hat{\phi}(x=0) &= \hat{\phi}_1, \\ \hat{u}(x=L) &= \hat{u}_2, & \hat{\psi}(x=L) &= \hat{\psi}_2, & \hat{\phi}(x=L) &= \hat{\phi}_2.\end{aligned}\quad (3.170)$$

que leva ao seguinte sistema de equações:

$$\begin{Bmatrix} A \\ B \\ C \\ D \\ X \\ Y \end{Bmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix} R_4 & R_5 & R_6 & R_4 p_1 & R_5 p_2 & R_6 p_3 \\ R_1 & R_2 & R_3 & -R_1 p_1 & -R_2 p_2 & -R_3 p_3 \\ 1 & 1 & 1 & p_1 & p_2 & p_3 \\ R_4 p_1 & R_5 p_2 & R_6 p_3 & R_4 & R_5 & R_6 \\ R_1 p_1 & R_2 p_2 & R_3 p_3 & -R_1 & -R_2 & -R_3 \\ p_1 & p_2 & p_3 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}}_{\hat{\Psi}_T^{-1}}^{-1} \begin{Bmatrix} \hat{u}_1 \\ \hat{\psi}_1 \\ \hat{\phi}_1 \\ \hat{u}_2 \\ \hat{\psi}_2 \\ \hat{\phi}_2 \end{Bmatrix}.\quad (3.171)$$

onde  $p_1 = e^{-ik_{T1}L}$ ,  $p_2 = e^{-ik_{T2}L}$  e  $p_3 = e^{-ik_{T3}L}$ .

Re-escrevendo as Equações (3.157), (3.158) e (3.159) na forma espectral produz-se:

$$\hat{F} = (2\mu + \lambda)A \frac{\partial \hat{u}}{\partial x} + \lambda A \hat{\psi}, \quad (3.172)$$

$$\hat{Q} = \mu I \left( \frac{\partial \hat{\psi}}{\partial x} - 24 \frac{\hat{\phi}}{h} \right), \quad (3.173)$$

$$\hat{H} = \frac{48}{5}(2\mu + \lambda)I \frac{\partial \hat{\phi}}{\partial x}. \quad (3.174)$$

Substituindo-se a derivada espacial das Equações (3.168) nas Equações (3.172), (3.173) e (3.174), aplicando-se as condições de contorno de força nos nós do elemento, ( $\hat{F}(0) = \hat{F}_1$ ,  $\hat{F}(L) = \hat{F}_2$ ,  $\hat{Q}(0) = \hat{Q}_1$ ,  $\hat{Q}(L) = \hat{Q}_2$ ,  $\hat{H}(0) = \hat{H}_1$  e  $\hat{H}(L) = \hat{H}_2$ ), o vetor de força nodal fica definido como:

$$\begin{Bmatrix} \hat{F}_1 \\ \hat{Q}_1 \\ \hat{H}_1 \\ \hat{F}_2 \\ \hat{Q}_2 \\ \hat{H}_2 \end{Bmatrix} = \hat{\Phi}_T \begin{Bmatrix} A \\ B \\ C \\ D \\ X \\ Y \end{Bmatrix}, \quad (3.175)$$

sendo

$$\hat{\Phi}_T = \begin{bmatrix} -ik_{T1}M_1R_4 + M_2R_1 & ik_{T2}M_1R_5 + M_2R_2 & ik_{T3}M_1R_6 + M_2R_3 & \dots \\ -ik_{T1}M_3R_1 - M_4 & -ik_{T2}M_3R_2 - M_4 & -ik_{T3}M_3R_3 - M_4 & \dots \\ -ik_{T1}M_5 & -ik_{T2}M_5 & -ik_{T3}M_5 & \dots \\ (-ik_{T1}M_1R_4 + M_2R_1)p_1 & (-ik_{T2}M_1R_5 + M_2R_2)p_2 & (-ik_{T3}M_1R_6 + M_2R_3)p_3 & \dots \\ (-ik_{T1}M_3R_1 - M_4)p_1 & (-ik_{T2}M_3R_2 - M_4)p_2 & (-ik_{T3}M_3R_3 - M_4)p_3 & \dots \\ -ik_{T1}M_5p_1 & -ik_{T2}M_5p_2 & -ik_{T3}M_5p_3 & \dots \end{bmatrix} \begin{bmatrix} (ik_{T1}M_1R_4 - M_2R_1)p_1 & (ik_{T2}M_1R_5 - M_2R_2)p_2 & (ik_{T3}M_1R_6 - M_2R_3)p_3 \\ (-ik_{T1}M_3R_1 - M_4)p_1 & (-ik_{T2}M_3R_2 - M_4)p_2 & (-ik_{T3}M_3R_3 - M_4)p_3 \\ ik_{T1}M_5p_1 & ik_{T2}M_5p_2 & -ik_{T3}M_5p_3 \\ ik_{T1}M_1R_4 - M_2R_1 & ik_{T2}M_1R_5 - M_2R_2 & ik_{T3}M_1R_6 - M_2R_3 \\ -ik_{T1}M_3R_1 - M_4 & -ik_{T2}M_3R_2 - M_4 & -ik_{T3}M_3R_3 - M_4 \\ +ik_{T1}M_5 & +ik_{T2}M_5 & +ik_{T3}M_5 \end{bmatrix}. \quad (3.176)$$

onde  $M_1 = (2\mu + \lambda)A_S$ ,  $M_2 = \lambda A_S$ ,  $M_3 = \mu I$ ,  $M_4 = \frac{24}{h}\mu I$  e  $M_5 = \frac{48}{5}(2\mu + \lambda)I$ .

Substituindo a Equações (3.171) em (3.175) a relação entre forças e os deslocamentos nodais é dada por:

$$\begin{Bmatrix} \hat{F}_1 \\ \hat{Q}_1 \\ \hat{H}_1 \\ \hat{F}_2 \\ \hat{Q}_2 \\ \hat{H}_2 \end{Bmatrix} = \underbrace{\hat{\Phi}_T \hat{\Psi}_T^{-1}}_{\hat{\mathbf{K}}_T} \begin{Bmatrix} \hat{u}_1 \\ \hat{\psi}_1 \\ \hat{\phi}_1 \\ \hat{u}_2 \\ \hat{\psi}_2 \\ \hat{\phi}_2 \end{Bmatrix}, \quad (3.177)$$

onde,  $\hat{\mathbf{K}}_T$ , é chamada de matriz de rigidez dinâmica para o elemento espectral de barra baseado no modelo dos três modos.

### 3.4.2 Elemento Espectral dos Três Modos Semi-Infinito

A Figura 3.14 mostra um elemento espectral semi-infinito de barra, este elemento pode ser pensado como um elemento espectral que não existem reflexões na extremidade infinita do elemento.



Figura 3.14: Modelo dos Três modos do elemento espectral de barra semi-infinito.

Para o elemento semi-infinito baseado no modelo dos três modos os deslocamentos são dados por:

$$\begin{aligned} \hat{u}(x) &= AR_4 e^{-ik_{T1}x} + BR_5 e^{-ik_{T2}x} + CR_6 e^{-ik_{T3}x}, \\ \hat{\psi}(x) &= AR_1 e^{-ik_{T1}x} + BR_2 e^{-ik_{T2}x} + CR_3 e^{-ik_{T3}x}, \\ \hat{\phi}(x) &= Ae^{-ik_{T1}x} + Be^{-ik_{T2}x} + Ce^{-ik_{T3}x}, \end{aligned} \quad (3.178)$$

as constantes  $A$ ,  $B$  e  $C$  podem ser encontradas partir das seguintes condições nodais:

$$\hat{u}(x=0) = \hat{u}_1, \quad \hat{\psi}(x=0) = \hat{\psi}_1, \quad \hat{\phi}(x=0) = \hat{\phi}_1, \quad (3.179)$$

que pode ser transformado no seguinte sistema:

$$\begin{Bmatrix} A \\ B \\ C \end{Bmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix} R_4 & R_5 & R_6 \\ R_1 & R_2 & R_3 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}}_{\hat{\Psi}_{TS}^{-1}}^{-1} \begin{Bmatrix} \hat{u}_1 \\ \hat{\psi}_2 \\ \hat{\phi}_3 \end{Bmatrix}. \quad (3.180)$$

Substituindo-se as Equações (3.178) nas Equações (3.172), (3.173) e (3.174), aplicando-se as condições de contorno de força nos nós do elemento,  $\hat{F}(0) = \hat{F}_1$ ,  $\hat{Q}(0) = \hat{Q}_1$  e  $\hat{H}(0) = \hat{H}_1$ :

$$\begin{Bmatrix} \hat{F}_1 \\ \hat{Q}_1 \\ \hat{H}_1 \end{Bmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix} -ik_{T1}M_1R_4 + M_2R_1 & ik_{T2}M_1R_5 + M_2R_2 & ik_{T3}M_1R_6 + M_2R_3 \\ -ik_{T1}M_3R_1 - M_4 & -ik_{T2}M_3R_2 - M_4 & -ik_{T3}M_3R_3 - M_4 \\ -ik_{T1}M_5 & -ik_{T2}M_5 & -ik_{T3}M_5 \end{bmatrix}}_{\hat{\Phi}_{TS}} \begin{Bmatrix} A \\ B \\ C \end{Bmatrix}. \quad (3.181)$$

Substituindo a Equação (3.180) na Equação (3.181) encontra-se a matriz de rigidez dinâmica para o elemento espectral semi-infinito de barra baseado no modelo dos Três Modos,  $\hat{\mathbf{K}}_{TS}$ .

$$\begin{Bmatrix} \hat{F}_1 \\ \hat{Q}_1 \\ \hat{H}_1 \end{Bmatrix} = \underbrace{\hat{\Phi}_{TS} \hat{\Psi}_{TS}^{-1}}_{\hat{\mathbf{K}}_{TS}} \begin{Bmatrix} \hat{u}_1 \\ \hat{\psi}_1 \\ \hat{\phi}_1 \end{Bmatrix} \quad (3.182)$$

### 3.4.3 Elemento Espectral dos Três Modos Trincado

A Figura 3.15 mostra o modelo do elemento espectral de barra finito com uma trinca transversal não propagante em posição arbitrária ao longo do elemento. O elemento contém dois nós com três graus de liberdade de deslocamento por nó: o deslocamento longitudinal,  $\hat{u}(x)$ , a rotação  $\hat{\psi}(x)$ , a rotação  $\hat{\phi}(x)$ , comprimento  $L$ , área da secção transversal  $A_S$ , posicionamento da trinca em relação ao nó 1  $L_1$ , e profundidade da trinca  $a$ .

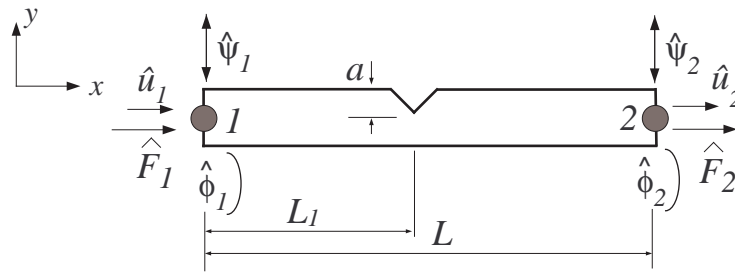


Figura 3.15: Elemento espectral de barra trincada para o modelo dos Três Modos

As soluções homogêneas das Equações (3.160), (3.161) e (3.162) podem ser re-escritas em duas partes, uma à esquerda da trinca,  $\hat{u}(x)^E$ ,  $\hat{\psi}(x)^E$  e  $\hat{\phi}(x)^E$ , e outra à direita da trinca,  $\hat{u}(x)^D$ ,  $\hat{\psi}(x)^D$  e  $\hat{\phi}(x)^D$ , respectivamente,

Para  $0 \leq x \leq L_1$

$$\begin{aligned}\hat{u}(x)^E &= A_1 R_4 e^{-ik_{T1}x} + B_1 R_5 e^{-ik_{T2}x} + C_1 R_6 e^{-ik_{T3}x} + D_1 R_4 e^{-ik_{T1}(L_1-x)} + X_1 R_5 e^{-ik_{T2}(L_1-x)} + \dots \\ &\quad Y_1 R_6 e^{-ik_{T3}(L_1-x)}, \\ \hat{\psi}(x)^E &= A_1 R_1 e^{-ik_{T1}x} + B_1 R_2 e^{-ik_{T2}x} + C_1 R_3 e^{-ik_{T3}x} - D_1 R_1 e^{-ik_{T1}(L_1-x)} - X_1 R_2 e^{-ik_{T2}(L_1-x)} - \dots \\ &\quad Y_1 R_3 e^{-ik_{T3}(L_1-x)}, \\ \hat{\phi}(x)^E &= A_1 e^{-ik_{T1}x} + B_1 e^{-ik_{T2}x} + C_1 e^{-ik_{T3}x} + D_1 e^{-ik_{T1}(L_1-x)} + X_1 e^{-ik_{T2}(L_1-x)} + Y_1 e^{-ik_{T3}(L_1-x)}.\end{aligned}\tag{3.183}$$

Para  $0 \leq x \leq L - L_1$

$$\begin{aligned}\hat{u}(x)^D &= A_2 R_4 e^{-ik_{T1}(L_1+x)} + B_2 R_5 e^{-ik_{T2}(L_1+x)} + C_2 R_6 e^{-ik_{T3}(L_1+x)} + \dots \\ &\quad D_2 R_4 e^{-ik_{T1}[L-(L_1+x)]} + X_2 R_5 e^{-ik_{T2}[L-(L_1+x)]} + Y_2 R_6 e^{-ik_{T3}[L-(L_1+x)]}, \\ \hat{\psi}(x)^D &= A_2 R_1 e^{-ik_{T1}(L_1+x)} + B_2 R_2 e^{-ik_{T2}(L_1+x)} + C_2 R_3 e^{-ik_{T3}(L_1+x)} - \dots \\ &\quad D_2 R_1 e^{-ik_{T1}[L-(L_1+x)]} - X_2 R_2 e^{-ik_{T2}[L-(L_1+x)]} - Y_2 R_3 e^{-ik_{T3}[L-(L_1+x)]}, \\ \hat{\phi}(x)^D &= A_2 e^{-ik_{T1}(L_1+x)} + B_2 e^{-ik_{T2}(L_1+x)} + C_2 e^{-ik_{T3}(L_1+x)} + D_2 e^{-ik_{T1}[L-(L_1+x)]} + \dots \\ &\quad X_2 e^{-ik_{T2}[L-(L_1+x)]} + Y_2 e^{-ik_{T3}[L-(L_1+x)]}.\end{aligned}\tag{3.184}$$

onde  $R_i$  são as razões de amplitude e são definidas pela Equação (3.164) como:

$$\begin{aligned}R_i &= \frac{(2\mu + \lambda)Ik_i^2 + 5\mu A_S - \rho I\omega^2}{-\frac{10}{45}i\mu A_S h}, \quad i = 1, 2, 3, \\ R_j &= \frac{ik_i \lambda A_S}{-(2\mu + \lambda)A_S k_i^2 + \rho A_S \omega^2} R_i, \quad j = 4, 5, 6 \quad \text{e} \quad i = 1, 2, 3.\end{aligned}\tag{3.185}$$

sendo,  $A_1$ ,  $A_2$ ,  $B_1$ ,  $B_2$ ,  $C_1$ ,  $C_2$ ,  $D_1$ ,  $D_2$ ,  $X_1$ ,  $X_2$ ,  $Y_1$ , e  $Y_2$  constantes determinadas a partir das condições de contorno e de compatibilidade de deslocamento e força na trinca. As condições de contorno e de compatibilidade de deslocamento no elemento podem ser escritas da seguinte forma:

Para o nó 1,  $x = 0$  nas Equações (3.183) e obtém-se os deslocamentos:

$$\hat{u}(0)^E = \hat{u}_1 \quad \hat{\psi}(0)^E = \hat{\psi}_1 \quad \hat{\phi}(0)^E = \hat{\phi}_1 \quad (3.186)$$

Para o nó 2,  $x = L - L_1$  nas Equações (3.184) e obtém-se os deslocamentos:

$$\hat{u}(L - L_1)^D = \hat{u}_2 \quad \hat{\psi}(L - L_1)^D = \hat{\psi}_2 \quad \hat{\phi}(L - L_1)^D = \hat{\phi}_2 \quad (3.187)$$

onde  $\hat{u}_1$ ,  $\hat{u}_2$  denotar os deslocamentos nodal,  $\hat{\psi}_1$ ,  $\hat{\psi}_2$ ,  $\hat{\phi}_1$  e  $\hat{\phi}_2$  são as rotações nodais.

As condições de compatibilidade na posição da trinca podem ser determinadas em função do comportamento dos deslocamentos na região trincada. A Figura 3.5 mostra um detalhe da seção transversal da barra na região trincada onde observa-se que existem duas áreas bem definidas, uma onde a trinca foi propagada e outra que permanece saudável. Na área da secção transversal da barra trincada os deslocamentos nos lados esquerdo e direito da posição da trinca são diferentes. Assim, essa diferença pode ser escrita como:

$$\hat{u}(L_1)^E - \hat{u}(0)^D = \Delta\hat{u}. \quad (3.188)$$

Sabendo-se que:

$$\Delta\hat{u} = c\hat{F}, \quad (3.189)$$

Substituindo a Equação (3.53) e Equação (3.172) na Equação (3.189):

$$\Delta\hat{u} = \frac{2\pi A_S}{Eb} \int_0^a \alpha f(\alpha)^2 d\alpha \left( (2\mu + \lambda) \frac{\partial \hat{u}}{\partial x} + \lambda \hat{\psi} \right), \quad (3.190)$$

arrumando o valor de  $\Delta\hat{u}$

$$\Delta\hat{u} = \frac{2\pi h}{E} \int_0^a \alpha f(\alpha)^2 d\alpha \left( (2\mu + \lambda) \frac{\partial \hat{u}}{\partial x} + \lambda \hat{\psi} \right). \quad (3.191)$$

Assim o valor de  $\theta^*$  é definido para a teoria de barra dos três modos.

$$\theta^* = \frac{2\pi h}{E} \int_0^a \alpha f(\alpha)^2 d\alpha, \quad (3.192)$$

Re-escrevendo a Equação (3.188) em Função de  $\theta^*$

$$\hat{u}(L_1)^E - \hat{u}(0)^D = \theta^* \left( (2\mu + \lambda) \frac{\partial \hat{u}}{\partial x} + \lambda \hat{\psi} \right). \quad (3.193)$$

Na da trinca ( $x = L_1$  para  $\hat{u}_1, \hat{\psi}_1$  e  $x = 0$  para  $\hat{u}_2, \hat{\psi}_2$ )

$$\hat{u}(L_1)^E - \hat{u}(0)^D = -\theta^* \left( (2\mu + \lambda) \frac{\partial \hat{u}(0)^E}{\partial x} + \lambda \hat{\psi}(0)^E \right), \quad (3.194)$$

$$(2\mu + \lambda) A_S \frac{\partial \hat{u}(L_1)^E}{\partial x} + \lambda A_S \hat{\psi}(L_1)^E = (2\mu + \lambda) A_S \frac{\partial \hat{u}(0)^D}{\partial x} + \lambda A_S \hat{\psi}(0)^D, \quad (3.195)$$

$$\hat{\psi}(L_1)^E = \hat{\psi}(0)^D, \quad (3.196)$$

$$\left( \frac{\partial \hat{\psi}(L_1)^E}{\partial x} - 24 \frac{\hat{\phi}(L_1)^E}{h} \right) = \left( \frac{\partial \hat{\psi}(0)^D}{\partial x} - 24 \frac{\hat{\phi}(0)^D}{h} \right), \quad (3.197)$$

$$\hat{\phi}(L_1)^E = \hat{\phi}(0)^D, \quad (3.198)$$

$$\frac{\partial \hat{\phi}(L_1)^E}{\partial x} = \frac{\partial \hat{\phi}(0)^D}{\partial x}. \quad (3.199)$$

Aplicando as Equações (3.183) e (3.184) nas condições de contorno Equações (3.186) e (3.187) e nas condições de acoplamento da trinca (3.194) – (3.199) as constantes  $A_1, B_1, C_1, D_1, X_1, Y_1, A_2, B_2, C_2, D_2, X_2$  e  $Y_2$  podem ser expressas em função dos deslocamentos nodais.

$$\begin{Bmatrix} A_1 \\ B_1 \\ C_1 \\ D_1 \\ X_1 \\ Y_1 \\ A_2 \\ B_2 \\ C_2 \\ D_2 \\ X_2 \\ Y_2 \end{Bmatrix} = \hat{\Psi}_{TT}^{-1} \begin{Bmatrix} \hat{u}_1 \\ \hat{\psi}_1 \\ \hat{\phi}_1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ \hat{u}_2 \\ \hat{\psi}_2 \\ \hat{\phi}_2 \end{Bmatrix}, \quad (3.200)$$

onde:

$$\hat{\Psi}_{TT}^{-1} = \begin{bmatrix}
R_4 & R_5 & R_6 & p_{L1}R_4 & p_{L2}R_5 & p_{L3}R_6 \\
R_1 & R_2 & R_3 & -p_{L1}R_1 & -p_{L2}R_2 & -p_{L3}R_3 \\
1 & 1 & 1 & p_{L1} & p_{L2} & p_{L3} \\
p_{L1}M_{r1} & p_{L2}M_{r2} & p_{L3}M_{r3} & -R_4 - \theta^*T_{r1} & -R_5 - \theta^*T_{r2} & -R_6 - \theta^*T_{r3} \\
A_S p_{L1}T_{r1} & A_S p_{L2}T_{r1} & A_S p_{L3}T_{r1} & -A_S T_{r1} & -A_S T_{r2} & -A_S T_{r3} \\
p_{L1}R_1 & p_{L2}R_2 & p_{L3}R_3 & -R_1 & -R_2 & -R_3 \\
-p_{L1}N_{r1} & -p_{L2}N_{r2} & -p_{L3}N_{r3} & N_{r1} & N_{r2} & N_{r3} \\
p_{L1} & p_{L2} & p_{L3} & 1 & 1 & 1 \\
-ip_{L1}k_{T1} & -ip_{L2}k_{T2} & -ip_{L3}k_{T3} & ik_{T1} & ik_{T2} & ik_{T3} \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0
\end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix}
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
p_{L1}R_4 & p_{L2}R_5 & p_{L3}R_6 & p_{d1}R_4 & p_{d2}R_5 & p_{d3}R_6 \\
-A_S p_{L1}T_{r1} & -A_S p_{L2}T_{r2} & -A_S p_{L3}T_{r3} & A_S p_{d1}T_{r1} & A_S p_{d2}T_{r2} & A_S p_{d3}T_{r3} \\
-p_{L1}R_1 & -p_{L2}R_2 & -p_{L3}R_3 & p_{d1}R_1 & p_{d2}R_2 & p_{d3}R_3 \\
p_{L1}N_{r1} & p_{L2}N_{r2} & p_{L3}N_{r3} & p_{d1}N_{r1} & p_{d2}N_{r2} & p_{d3}N_{r3} \\
-p_{L1} & -p_{L2} & -p_{L3} & -p_{d1} & -p_{d2} & -p_{d3} \\
ip_{L1}k_{T1} & ip_{L2}k_{T2} & ip_{L3}k_{T3} & -ip_{d1}k_{T1} & -ip_{d2}k_{T2} & -ip_{d3}k_{T3} \\
p_1R_4 & p_2R_5 & p_3R_6 & R_4 & R_5 & R_6 \\
p_1R_1 & p_2R_2 & p_3R_3 & -R_1 & -R_2 & -R_3 \\
p_1 & p_2 & p_3 & 1 & 1 & 1
\end{bmatrix}, \quad (3.201)$$

e:

$$\begin{aligned}
p_1 &= e^{-iLk_{T1}}, \\
p_2 &= e^{-iLk_{T2}}, \\
p_3 &= e^{-iLk_{T3}}, \\
p_{L1} &= e^{-iL_1k_{T1}}, \\
p_{L2} &= e^{-iL_1k_{T2}}, \\
p_{L3} &= e^{-iL_1k_{T3}}, \\
p_{d1} &= e^{(-i(L-L_1)k_{T1})}, \\
p_{d2} &= e^{(-i(L-L_1)k_{T2})}, \\
p_{d3} &= e^{(-i(L-L_1)k_{T3})}, \\
N_{r1} &= (24/h - iR_1k_{T1}), \\
N_{r2} &= (24/h - iR_2k_{T2}), \\
N_{r3} &= (24/h - iR_3k_{T3}), \\
M_{r1} &= (-R_4 + \theta^*T_{r1}), \\
M_{r2} &= (-R_5 + \theta^*T_{r2}), \\
M_{r3} &= (-R_6 + \theta^*T_{r3}), \\
T_{r1} &= R_1\lambda - iR_4(\lambda + 2\mu)k_{T1} \\
T_{r2} &= R_2\lambda - iR_5(\lambda + 2\mu)k_{T2} \quad \text{e} \\
T_{r3} &= R_3\lambda - iR_6(\lambda + 2\mu)k_{T3}.
\end{aligned}$$



As forças espectrais nodais para a teoria dos três modos são definidas pelas Equações (3.172), (3.173) e (3.174), assim:

Extremidade esquerda ( $x = 0$ ):

$$\begin{aligned}\hat{F}_1 &= (2\mu + \lambda)A_S \frac{\partial \hat{u}(0)^E}{\partial x} + \lambda A_S \hat{\psi}(0)^E, \\ \hat{Q}_1 &= \mu I \left( \frac{\partial \hat{\psi}(0)^E}{\partial x} - 24 \frac{\hat{\phi}(0)^E}{h} \right),\end{aligned}\tag{3.202}$$

$$\hat{H}_1 = \frac{48}{5}(2\mu + \lambda)I \frac{\partial \hat{\phi}(0)^E}{\partial x}.$$

Extremidade direita ( $x = (L - L_1)$ ):

$$\begin{aligned}\hat{F}_2 &= (2\mu + \lambda)A_S \frac{\partial \hat{u}(L - L_1)^D}{\partial x} + \lambda A_S \hat{\psi}(L - L_1)^D, \\ \hat{Q}_2 &= \mu I \left( \frac{\partial \hat{\psi}(L - L_1)^D}{\partial x} - 24 \frac{\hat{\phi}(L - L_1)^D}{h} \right),\end{aligned}\tag{3.203}$$

$$\hat{H}_2 = \frac{48}{5}(2\mu + \lambda)I \frac{\partial \hat{\phi}(L - L_1)^D}{\partial x},$$

que pode ser escrito com:

$$\begin{Bmatrix} \hat{F}_1 \\ \hat{Q}_1 \\ \hat{H}_1 \\ \hat{F}_2 \\ \hat{Q}_2 \\ \hat{H}_2 \end{Bmatrix} = \hat{\Phi}_{TT} \begin{Bmatrix} A_1 \\ B_1 \\ C_1 \\ D_1 \\ X_1 \\ Y_1 \\ A_2 \\ B_2 \\ C_2 \\ D_2 \\ X_2 \\ Y_2 \end{Bmatrix},\tag{3.204}$$

onde

$$\begin{aligned}
\hat{\Phi}_{TT} = & \begin{bmatrix} M_2 R_1 - i M_1 R_4 k_{T1} & M_2 R_2 - i M_1 R_5 k_{T2} & M_2 R_3 - i M_1 R_6 k_{T3} & \dots \\ M_3(-24/h - i R_1 k_{T1}) & M_3(-24/h - i R_2 k_{T2}) & M_3(-24/h - i R_3 k_{T3}) & \dots \\ -i 48/5 I_o(\lambda + 2\mu) k_{T1} & -i 48/5 I_o(\lambda + 2\mu) k_{T2} & -i 48/5 I_o(\lambda + 2\mu) k_{T3} & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots \end{bmatrix} \\
& \begin{bmatrix} \dots & p_{L1}(-M_2 R_1 + i M_1 R_4 k_{T1}) & p_{L2}(-M_2 R_2 + i M_1 R_5 k_{T2}) & p_{L3}(-M_2 R_3 + i M_1 R_6 k_{T3}) & \dots \\ \dots & p_{L1} M_3(-24/h - i R_1 k_{T1}) & p_{L2} M_3(-24/h - i R_2 k_{T2}) & p_{L3} M_3(-24/h - i R_3 k_{T3}) & \dots \\ \dots & i p_{L1} 48/5 I_o(\lambda + 2\mu) k_{T1} & i p_{L2} 48/5 I_o(\lambda + 2\mu) k_{T2} & i p_{L3} 48/5 I_o(\lambda + 2\mu) k_{T3} & \dots \\ \dots & 0 & 0 & 0 & \dots \\ \dots & 0 & 0 & 0 & \dots \\ \dots & 0 & 0 & 0 & \dots \end{bmatrix} \\
& \begin{bmatrix} \dots & 0 & 0 & 0 & \dots \\ \dots & 0 & 0 & 0 & \dots \\ \dots & 0 & 0 & 0 & \dots \\ \dots & p_1(M_2 R_1 - i M_1 R_4 k_{T1}) & p_2(M_2 R_2 - i M_1 R_5 k_{T2}) & p_3(M_2 R_3 - i M_1 R_6 k_{T3}) & \dots \\ \dots & p_1 M_3(-24/h - i R_1 k_{T1}) & p_2 M_3(-24/h - i R_2 k_{T2}) & p_3 M_3(-24/h - i R_3 k_{T3}) & \dots \\ \dots & -i p_1 48/5 I_o(\lambda + 2\mu) k_{T1} & -i p_2 48/5 I_o(\lambda + 2\mu) k_{T2} & -i p_3 48/5 I_o(\lambda + 2\mu) k_{T3} & \dots \end{bmatrix} \\
& \begin{bmatrix} \dots & 0 & 0 & 0 \\ \dots & 0 & 0 & 0 \\ \dots & 0 & 0 & 0 \\ \dots & -M_2 R_1 + i M_1 R_4 k_{T1} & -M_2 R_2 + i M_1 R_5 k_{T2} & -M_2 R_3 + i M_1 R_6 k_{T3} \\ \dots & M_3(-24/h - i R_1 k_{T1}) & M_3(-24/h - i R_2 k_{T2}) & M_3(-24/h - i R_3 k_{T3}) \\ \dots & i 48/5 I_o(\lambda + 2\mu) k_{T1} & i 48/5 I_o(\lambda + 2\mu) k_{T2} & i 48/5 I_o(\lambda + 2\mu) k_{T3} \end{bmatrix}, \quad (3.205)
\end{aligned}$$

onde,  $M_1 = (2\mu + \lambda)A_S$ ,  $M_2 = \lambda A_S$  e  $M_3 = I\mu$ . Substituindo-se a Equação 3.200 na Equação 3.204 obtém-se a rigidez dinâmica de um elemento espectral de barra trincado para a teoria dos Três Modos  $\hat{\mathbf{K}}_{TT}$ .

$$\begin{bmatrix} \hat{F}_1 \\ \hat{Q}_1 \\ \hat{H}_1 \\ \hat{F}_2 \\ \hat{Q}_2 \\ \hat{H}_2 \end{bmatrix} = \underbrace{\hat{\Phi}_{TT} \hat{\Psi}_{TT}^{-1}}_{\hat{\mathbf{K}}_{TT}} \begin{bmatrix} \hat{u}_1 \\ \hat{\psi}_1 \\ \hat{\phi}_1 \\ \hat{u}_2 \\ \hat{\psi}_2 \\ \hat{\phi}_2 \end{bmatrix}. \quad (3.206)$$

## 3.5 Introdução às Ondas de Lamb

O clássico modelo da propagação das ondas de Lamb está associado à onda em um movimento em um meio homogêneo e isotrópico entre duas superfícies planas e paralelas. Problemas de propagação de ondas de Lamb em placas têm sido estudados usando-se a teoria de placas planas, a qual assume um deslocamento longitudinal e transversal constante ao longo da seção transversal de uma placa. É importante mencionar que, dentro das técnicas de propagação de ondas ultrassônicas, as ondas de Lamb são muito utilizadas para a detecção de falhas através de observação das mudanças na forma das ondas recebidas (ou medidas). O nome "ondas de Lamb" refere-se ao Horace Lamb, o cientista que as descobriu em 1917.

### 3.5.1 Formulação

Inicialmente devemos recordar as equações advindas da teoria da elasticidade: equação do movimento,

$$\sigma_{ij,j} + \rho f_i = \rho \ddot{u}_i \quad (3.207)$$

equação da deformação,

$$\varepsilon_{ij} = \frac{1}{2} (u_{i,j} + u_{j,i}) \quad (3.208)$$

equação constitutivas (material Isotrópico),

$$\sigma_{ij} = \lambda \varepsilon_{kk} \delta_{ij} + \mu \varepsilon_{ij} \quad (3.209)$$

Substituindo (3.208) e (3.209) em (3.207) temos:

$$\mu \cdot u_{i,jj} + (\lambda + \mu) u_{i,jj} + \rho f_i = \rho \ddot{u}_i \quad (3.210)$$

As equações de movimento (3.210), são as que regem as equações diferenciais de deslocamento. Caso o domínio em que a solução é procurada seja infinito, então essas equações são suficientes. Se o domínio é finito, condições de contorno são necessárias para a modelagem do problema. As formas gerais de tais condições são as seguintes, sobre a superfície de deslocamentos,  $u(x, t)$ ,

$$u(\bar{x}, t) = u_0(\bar{x}), \quad (3.211)$$

onde  $\bar{x}$  é  $x, y, z$ .

Superfície tracionada,  $t_i$

$$t_i = \sigma_{ji} n_i \quad (3.212)$$

### 3.5.2 Problema para uma placa livre

A geometria do problema da placa com duas superfícies livres é ilustrada na Figura 3.16. Este problema é regido pelas equações de movimento (3.210). As superfícies com as coordenadas  $y = d/2$  e  $y = -d/2$  são considerados como livres de tração. Uma excitação ultra-sônica ocorre em algum ponto na placa. Quando a energia supersônica da excitação encontra a região que delimita a superfície superior e/ou a superfície inferior da placa, modos de propagação ocorrem. Após alguns impactos na placa, a excitação causa a formação de pacotes de onda, ou como são comumente chamados *guided wave modes*. Baseado na entrada angular e frequência utilizada, pode-se prever quantos modos diferentes podem ser produzidos na placa.

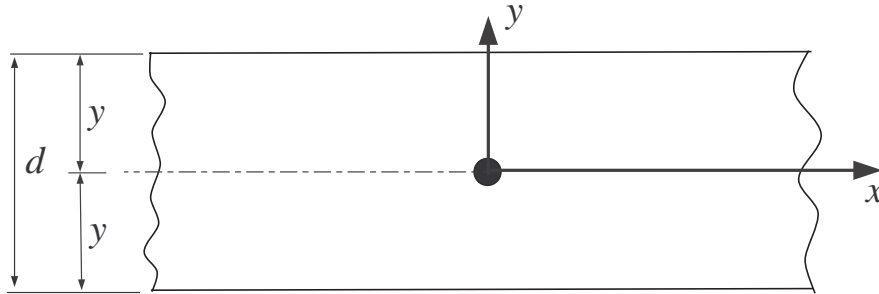


Figura 3.16: Geometria da placa com duas superfícies livres.

A solução exata deste problema pode ser obtida através da utilização de várias abordagens diferentes. Os mais populares são os métodos da solução potencial. Aqui será mostrada a resolução proposta por Rose (2004).

Se o vetor deslocamento (campo) é decomposto de acordo com a decomposição de Helmholtz e o resultado substituído em (3.210), duas equações desacopladas são obtidas.

$$\frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \phi}{\partial y^2} = \frac{1}{C_L^2} \frac{\partial^2 \phi}{\partial t^2}, \quad (3.213)$$

$$\frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial y^2} = \frac{1}{C_T^2} \frac{\partial^2 \psi}{\partial t^2} \quad (3.214)$$

onde a Equação (3.213) governa as ondas longitudinais (tração e compressão) e Equação (3.214) governa as ondas cisalhamento (shear). Sendo  $C_L^2$  e  $C_T^2$  funções das características do material na direção longitudinal e transversal, respectivamente, para materiais isotrópicos eles são definidos, segundo Doyle (1997), por:

$$C_L^2 = \frac{\lambda + 2\mu}{\rho} \quad \text{e} \quad C_T^2 = \frac{\mu}{\rho} \quad (3.215)$$

A análise feita aqui será muito simplificada para maiores detalhes ver Rose (2004). Como resultado de nosso pressuposto estado plano de tensão, Figura 3.17, os deslocamentos podem ser escritos em termos das equações abaixo.

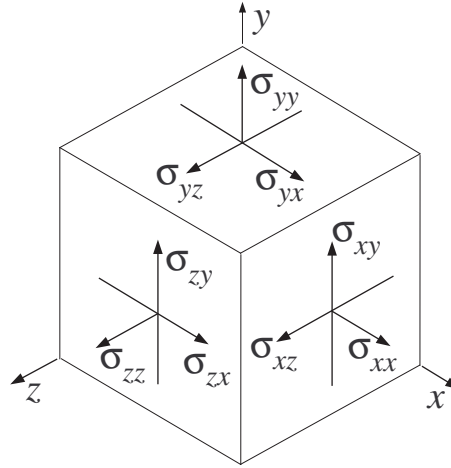


Figura 3.17: Estado plano de tensão.

$$u_1 = u = \frac{\partial \phi}{\partial x} + \frac{\partial \psi}{\partial y}, \quad u_2 = w = 0 \quad \text{e} \quad u_3 = v = \frac{\partial \phi}{\partial y} + \frac{\partial \psi}{\partial x}, \quad (3.216)$$

e as tensões podem ser escritas como:

$$\sigma_{yy} = \mu \left( \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} \right) = \mu \left( \frac{\partial^2 \phi}{\partial x \partial y} - \frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial y^2} \right), \quad (3.217)$$

$$\sigma_{yx} = \lambda \left( \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} \right) + 2\mu \frac{\partial v}{\partial y} = \lambda \left( \frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \phi}{\partial y^2} \right) + 2\mu \left( \frac{\partial^2 \phi}{\partial y^2} - \frac{\partial^2 \psi}{\partial x \partial y} \right). \quad (3.218)$$

Foi iniciada a análise, assumindo soluções para (3.213) e (3.214) na forma:

$$\phi = \Phi(y)e^{i(kx-wt)} \quad \text{e} \quad \psi = \Psi(y)e^{i(kx-wt)}. \quad (3.219)$$

Note que estas soluções representam ondas propagando na direção  $x$  e ondas estacionárias na direção  $y$ . Rose (2004) propõe as seguintes soluções para  $\Psi(y)$  e  $\Phi(y)$ .

$$\Phi = A_1 \sin(py) + A_2 \cos(py) \quad \text{e} \quad \Psi = B_1 \cos(qy) + B_2 \sin(qy). \quad (3.220)$$

onde;

$$p^2 = \frac{w^2}{C_L^2} - k^2 \quad \text{e} \quad q^2 = \frac{w^2}{C_T^2} - k^2 \quad (3.221)$$

Com estes resultados, os deslocamentos e as tensões podem ser obtidos diretamente a partir das Equações (3.216), (3.217) e (3.218). Omitindo o termo  $e^{i(kx-wt)}$  em todas as expressões, para simplificar a notação, os resultados são os seguintes:

$$u_1 = \frac{\partial \phi}{\partial x} + \frac{\partial \psi}{\partial y} \Rightarrow u = \left[ ik\Phi + \frac{d\Psi}{dy} \right], \quad (3.222)$$

$$u_3 = \frac{\partial \phi}{\partial y} + \frac{\partial \psi}{\partial x} \Rightarrow v = \left[ \frac{d\Phi}{dy} + ik\Psi \right], \quad (3.223)$$

$$\sigma_{yx} = \mu \left( 2ik \frac{d\Phi}{dy} + k^2 \Psi + \frac{d^2 \Psi}{dy^2} \right), \quad (3.224)$$

$$\sigma_{yy} = \left[ \lambda \left( -k^2 \Phi + \frac{d^2 \Phi}{dy^2} \right) + 2\mu \left( \frac{d^2 \Phi}{dy^2} - ik \frac{d\Psi}{dy^2} \right) \right]. \quad (3.225)$$

Uma vez que os campos variáveis envolvem senos, com argumento  $y$ , que são funções ímpares (mesma resposta), sobre  $y = 0$ , e cossenos que são funções pares, as soluções são divididas em dois conjuntos de modos: simétricos e anti-simétricos. Especificamente, para o deslocamento na direção  $x$ , o movimento será simétrico (em relação ao plano médio da placa), se  $u$  contém co-senos mas será anti-simétrica se  $u$  contém senos. O oposto é verdadeiro para deslocamentos na direção  $y$ . Assim, dividindo-se os modos de propagação das ondas na placa em dois sistemas:

Modos Simétricos:

$$\begin{aligned}
\Phi &= A_2 \cos(py) \\
\Psi &= B_1 \sin(py) \\
u &= ikA_2 \cos(py) + qB_1 \cos(qy) \\
v &= -qA_2 \sin(py) - ikB_1 \sin(qy) \\
\sigma_{yx} &= \mu [-2ikpA_2 \sin(py) + (k^2 - q^2) B_2 \sin(qy)] \\
\sigma_{yy} &= -\lambda (k^2 + p^2) A_2 \cos(py) - 2\mu [p^2 A_2 \cos(py) + ikqB_1 \cos(qy)]
\end{aligned} \tag{3.226}$$

Modos Anti-Simétricos

$$\begin{aligned}
\Phi &= A_1 \sin(py) \\
\Psi &= B_2 \cos(qy) \\
u &= ikA_1 \sin(py) + qB_2 \sin(qy) \\
v &= qA_1 \cos(py) - ikB_2 \cos(qy) \\
\sigma_{yx} &= \mu [2ikpA_1 \cos(py) + (k^2 - q^2) B_2 \cos(qy)] \\
\sigma_{yy} &= -\lambda (k^2 + p^2) A_1 \cos(py) - 2\mu [p^2 A_1 \sin(py) - ikqB_2 \sin(qy)]
\end{aligned} \tag{3.227}$$

A Figura 3.18 ilustra uma representação do modo simétrico e anti- simétrico.

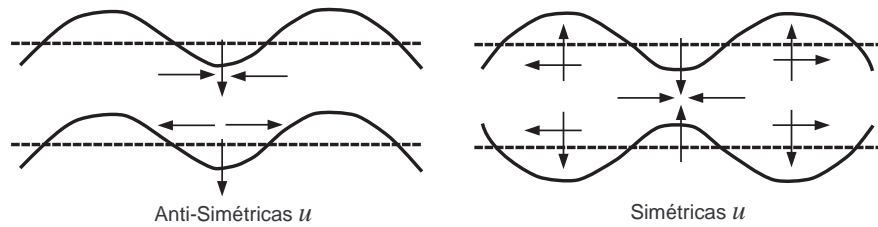


Figura 3.18: Representação dos modos: Simétricos e Anti-simétricos.

As constantes  $A_1$ ,  $A_2$ ,  $B_1$  e  $B_2$ , assim como as equações de dispersão ainda são desconhecidas. Elas podem ser determinadas aplicando-se a condição de tração livre nas superfícies da placa, ou seja,  $\sigma_{yx} = \sigma_{xx} = 0$  em  $y = \pm d/2$ . Aplicando essas condições, teremos um sistema homogêneo de duas equações, as constantes  $A_2$ ,  $B_1$  (para o caso simétrico) e  $A_1$ ,  $B_2$  (para o caso anti-simétrico). Para soluções homogêneas é necessário que o determinante da matriz seja nulo, a fim de assegurar que não sejam as soluções triviais.

### Modo Simétrico

$$\begin{bmatrix} -\mu 2ikp \sin(py) & \mu (k^2 - q^2) \sin(qy) \\ [-\lambda (k^2 + p^2) - 2\mu p^2] \cos(py) & 2\mu ikq \cos(qy) \end{bmatrix} \cdot \begin{Bmatrix} A_2 \\ B_1 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \end{Bmatrix}. \quad (3.228)$$

### Modo Anti-Simétrico

$$\begin{bmatrix} \mu 2ikp \cos(py) & \mu 2 (k^2 - q^2) \cos(qy) \\ [-\lambda (k^2 + p^2) - 2\mu p^2] \sin(py) & 2\mu ikq B_2 \sin(qy) \end{bmatrix} \cdot \begin{Bmatrix} A_1 \\ B_2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \end{Bmatrix}. \quad (3.229)$$

Fazendo o determinante da matriz igual a zero pode se determinar os números de ondas em função da frequência que são comumente chamados relações de dispersão.

### Modos Anti-simétricos

$$\frac{\tan(q(d/2))}{\tan(p(d/2))} = -\frac{(q^2 - k^2)^2}{4k^2 pq} \quad (3.230)$$

### Modos Simétricos

$$\frac{\tan(q(d/2))}{\tan(p(d/2))} = -\frac{4k^2 pq}{(q^2 - k^2)^2} \quad (3.231)$$

Estas equações são conhecidas como relações de Rayleigh-Lamb em frequência. Estas equações foram os primeiros a defini-las no final do século XIX. Estas equações podem ser usadas para determinar a velocidade com que uma onda de uma determinada frequência vai propagar na placa. Equações desta natureza são conhecidas como *relação de dispersão*. Embora as equações pareçam simples, só podem ser resolvidas através de métodos numéricos.

É importante mencionar que as técnicas usadas na propagação de ondas são eficazes em detectar as falhas e danos que aparecem na forma de descontinuidades geométricas. A revisão sobre ondas de Lamb foi discutida aqui, pois essa teoria é muito eficaz para representar os vários modos de propagação em uma placa fina, que pode ser comparada a uma barra ou a uma viga, com uma largura muito maior que altura. Já foi mencionado que existem dois tipos de modos de Lamb, simétricos e anti-simétricos. As ondas de Lamb simétricas são ondas que podem ser comparadas a ondas longitudinais, como as que ocorrem em barras, já as ondas anti-simétricas podem ser comparas a ondas transversais, como as que ocorrem em modelos de viga.



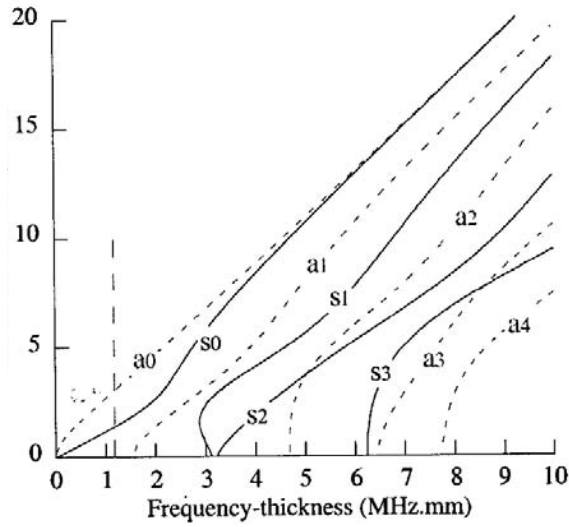
# Capítulo 4

## Resultados Numéricos

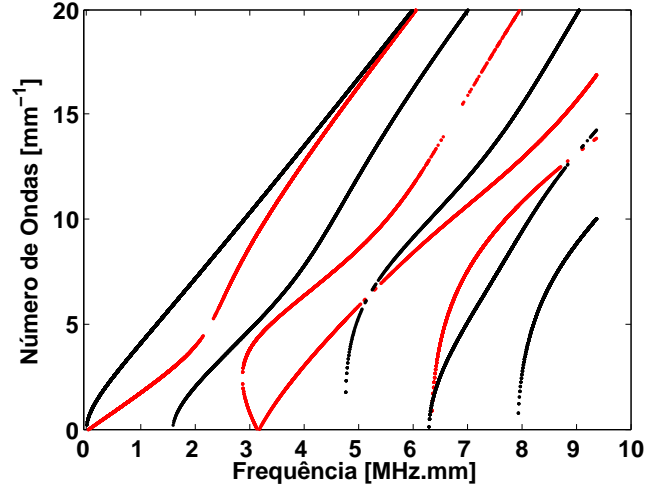
### 4.1 Introdução

Neste capítulo serão apresentados os resultados numéricos obtidos na verificação da implementação computacional dos modelos de barra apresentados no Capítulo 3. Os elementos espectrais de barra dos modelos: elementar, de Love, de Mindlin-Herrmann e dos três modos foram implementados no programa Matlab® e os resultados obtidos são comparados com aqueles mostrados na literatura. No intuito de demonstrar a validade dos modelos, alguns exemplos numéricos são realizados e os resultados discutidos.

Foi relatado na seção 3.5 que os modos simétricos de Lamb em placas são equivalentes aos modos de deformação presentes em todos os modelos de barra. Assim, serão comparados os resultados das relações de dispersões de Lamb com aqueles dos modelos de barra. A fim de validar o programa implementado no Matlab para o cálculo das relações de dispersão em placas de Lamb, comparam-se os resultados obtidos no programa com aqueles dos trabalhos de Castaings *et al.* (2002) e Yang e Qiao (2005). A Figura 4.1a mostra as curvas de dispersão dos modos simétricos e anti-simétricos de uma placa fina apresentadas no artigo de Castaings *et al.* (2002). A Figura 4.1b, apresenta os resultados obtidos pelo programa para uma placa com as mesmas dimensões e propriedades do artigo (espessura,  $d = 8$  mm; módulo de elasticidade,  $E = 72$  GPa; e coeficiente de Poisson,  $\nu = 0,33$ ). Uma comparação visual dos gráficos de dispersão mostra uma boa concordância dos resultados, validando o programa implementado.



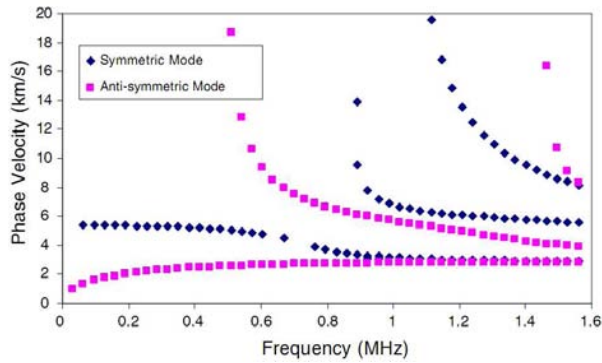
(a)



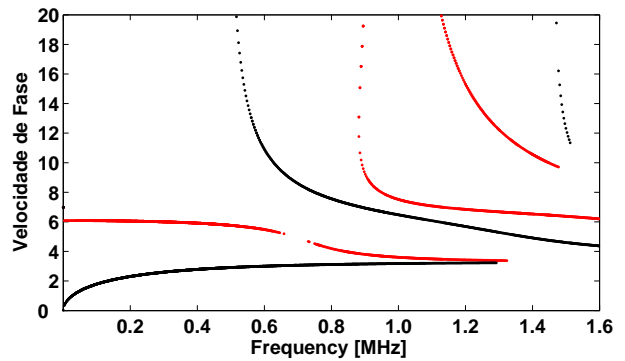
(b)

Figura 4.1: Curvas de dispersão das ondas de Lamb para uma placa fina: a) Castaings *et al.* (2002); e b) programa implementado no Matlab.

As Figuras 4.2a e b mostram as velocidades de fase da ondas para os casos simétrico e anti-simétrico de uma placa fina (espessura,  $d = 8$  mm; módulo de elasticidade,  $E = 72$  GPa; e coeficiente de Poisson,  $\nu = 0,33$ ) apresentadas no artigo de Yang e Qiao (2005) e calculadas pelo programa, respectivamente. Novamente, comparando-se visualmente os gráficos de velocidades de ondas observa-se uma boa concordância dos resultados.



(a)



(b)

Figura 4.2: Velocidade das ondas de Lamb para uma placa fina: a) Yang e Qiao (2005) b) programa implementado no Matlab.

## 4.2 Exemplos do Modelo Elementar

A fim de comparar as curvas dos modos de Lamb na placa com o modelo de barra elementar, um exemplo numérico foi feito com uma barra livre-livre com as seguintes dimensões e propriedades: comprimento,  $L=4$  m; largura,  $b=0,02$  m; altura,  $h=0,02$  m; módulo de elasticidade,  $E=210$  GPa; coeficiente de Poisson,  $\nu=0,3$ ; e densidade,  $\rho=7860$  kg/m<sup>3</sup>. A placa de Lamb tem as mesmas propriedades da barra com espessura  $d = h$ .

A Figura 4.3a e 4.3b mostram os resultados dos números de onda e das velocidades de fase, respectivamente, para o modelo de barra elementar e o caso simétrico da placa de Lamb. Os resultados obtidos para os números de onda e as velocidades de ondas demonstram que para o primeiro modo de propagação na faixa de frequências de zero até próximo de 80 kHz, estes encontram-se bem próximos mas divergem daí em diante. A partir da frequência de 160 kHz surgem simultaneamente dois novos modos de propagação na placa de Lamb que não são representados pelo modelo de barra elementar. O mesmo ocorrerá para os modos de frequências mais altas da placa de Lamb

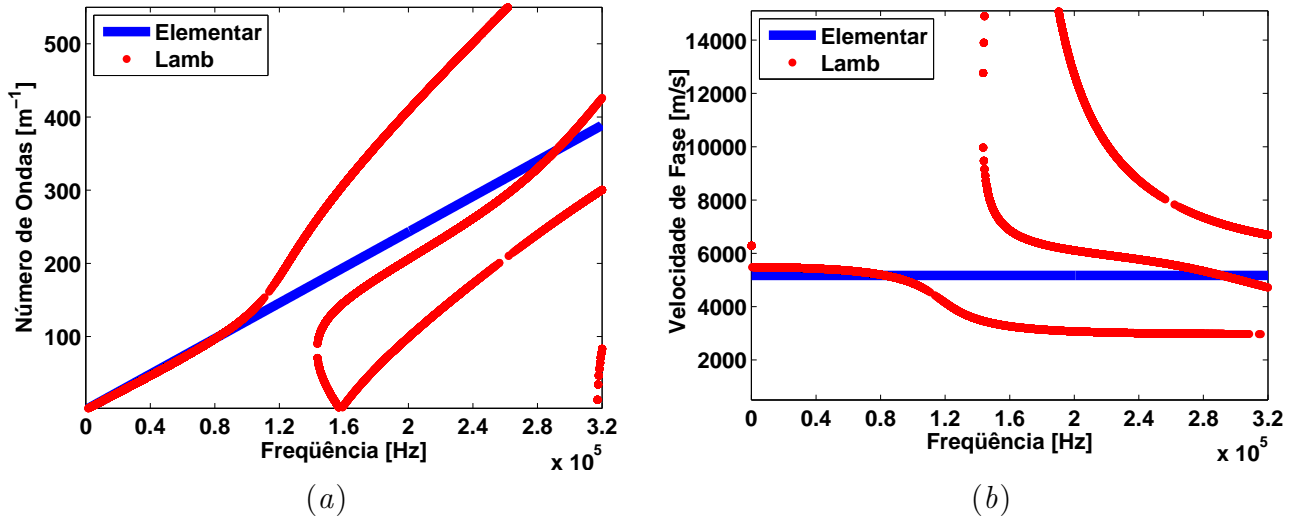


Figura 4.3: Gráficos de dispersão: a) número de onda; b) velocidade de fase, para o modelo elementar e da placa de Lamb.

A detecção de uma trinca pode ser feita através de observações no tempo da propagação das onda no elemento trincado (reflexões e transmissões na trinca) ou através da diferença entre as observações no tempo da propagação das ondas do elemento saudável com o elemento trincado.

Assim, para avaliar o desempenho dos elementos espectrais de barra saudável e trincado exem-

plos numéricos foram realizados utilizando-se estruturas livre compostas por um elemento espectral saudável (ou trincado) conectado a um elemento espectral semi-infinito, com uma força de excitação impulsiva na conexão dos dois elementos, Figura 4.4. Os elementos espectrais saudável e trincado têm as mesmas geometrias e propriedades descritas para o modelo de barra apresentado no início desta seção. A trinca foi posicionada no meio do elemento. O elemento espectral semi-infinito tem as mesmas propriedades do saudável.

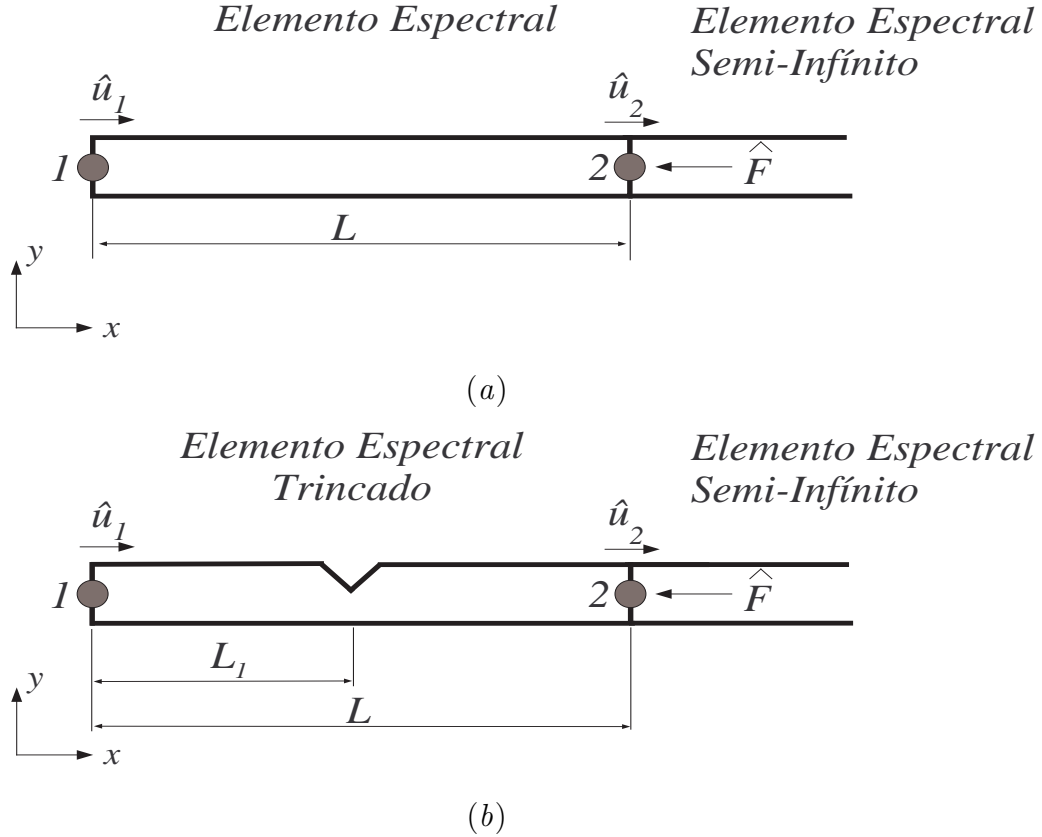


Figura 4.4: Estrutura de teste com o elemento: a) saudável; b) trincado.

O sinal de excitação impulsivo, construído segundo o trabalho de Palacz e Krawczuk (2002), consiste da modulação de uma função seno por uma janela triangular. O primeiro pulso foi obtido com 20 períodos da função seno com um tempo de duração da janela de 0,25 ms e frequência de 80 kHz, o qual foi denominado de Pulso-80; o segundo pulso foi obtido com 20 períodos da função seno com um tempo de duração da janela de 0,125 ms e frequência de 160 kHz, o qual foi denominado de Pulso-160. As Figuras 4.5a e 4.5b mostram os sinais do Pulso-80 e do Pulso-160 com seus respectivos espectros.

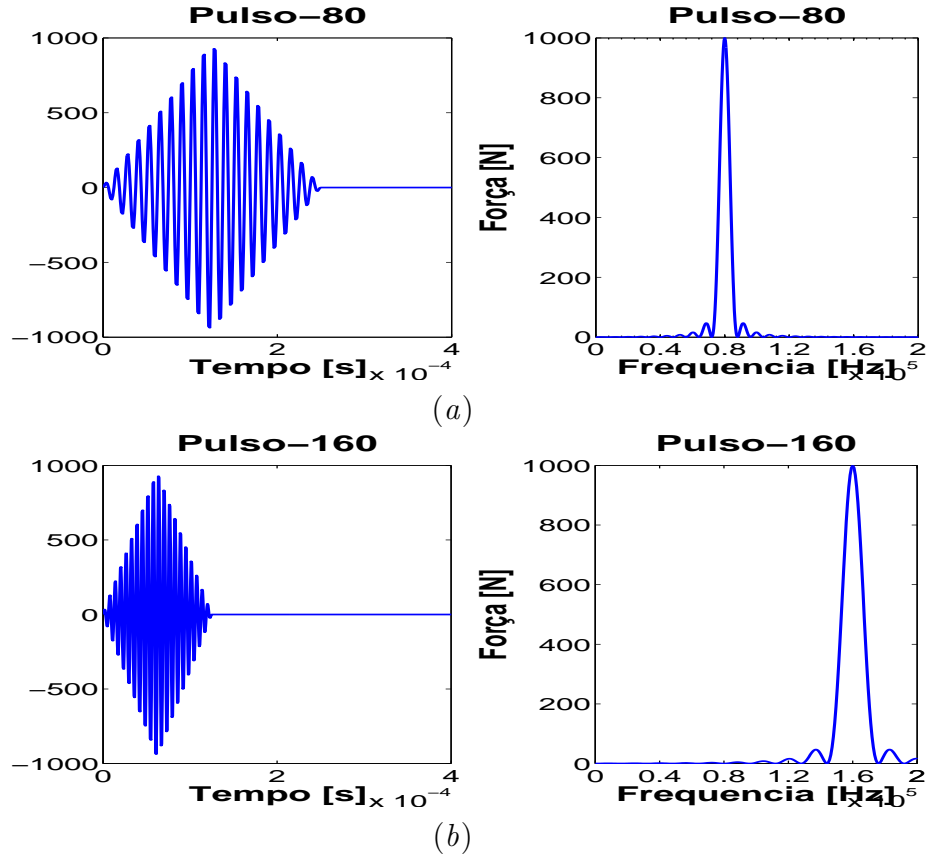


Figura 4.5: Força de excitação para a barra: *a*) Pulso-80 com frequência central de 80 kHz e *b*) Pulso-160 com frequência central de 160 kHz.

A Figura 4.6 mostra a resposta em aceleração para o Pulso-80 para uma barra saudável e trincada. Para facilidade de compreensão, as respostas em aceleração foram normalizadas unitariamente. A Figura 4.6*a* mostra a resposta para o modelo de estrutura saudável, o primeiro sinal refere-se à força de excitação e o segundo sinal é devido à reflexão da onda na extremidade esquerda da barra (nó 1). A Figura 4.6*b* mostra a resposta em aceleração para o modelos de estrutura trincada com uma trinca de 20% da altura  $h$ . Pode-se ver claramente uma primeira reflexão devido à trinca, logo em seguida surge um segundo pulso, esse devido à reflexão na extremidade esquerda da barra (nó 1). A diminuição da amplitude de deve ao amortecimento do material,  $\eta=0,003$ .

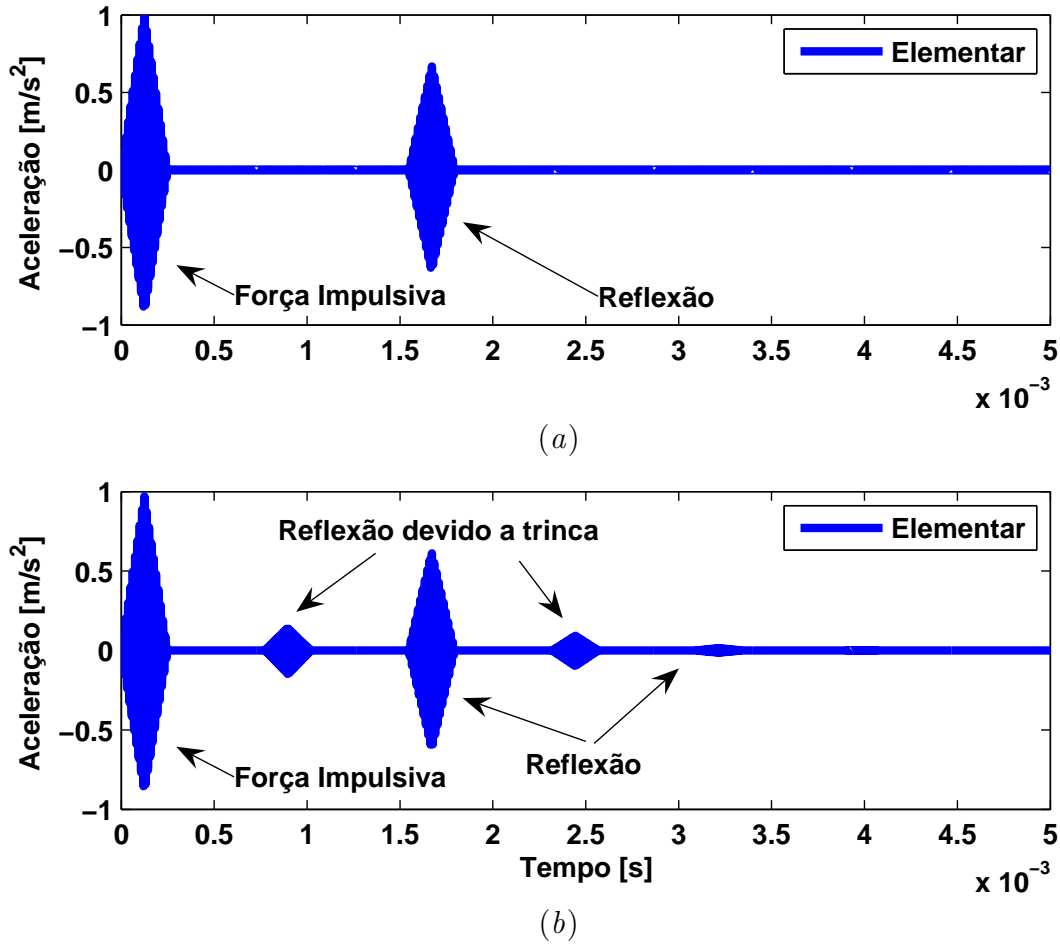


Figura 4.6: Respostas obtidas para as teorias elementar no nó 2 para o Pulso-80: *a*) estrutura saudável; *b*) estrutura trincada com uma trinca de 20%.

A fim de incluir os efeitos do erro na medição foi adicionado ao Pulso-80 um ruído aleatório com amplitude de 2 % do seu valor máximo e, também, no elemento espectral trincado, foi imposta uma profundidade da trinca de 10% da altura da sua seção transversal. O elemento espectral semi-infinito tem as mesmas propriedades do saudável. A Figura de 4.7 mostra as respostas em aceleração no ponto de excitação (nó 2), obtida com o Pulso-80, para: *(a)* estrutura saudável; *(b)* estrutura trincada; e *(c)* a diferença entre as respostas da estrutura saudável e trincada.

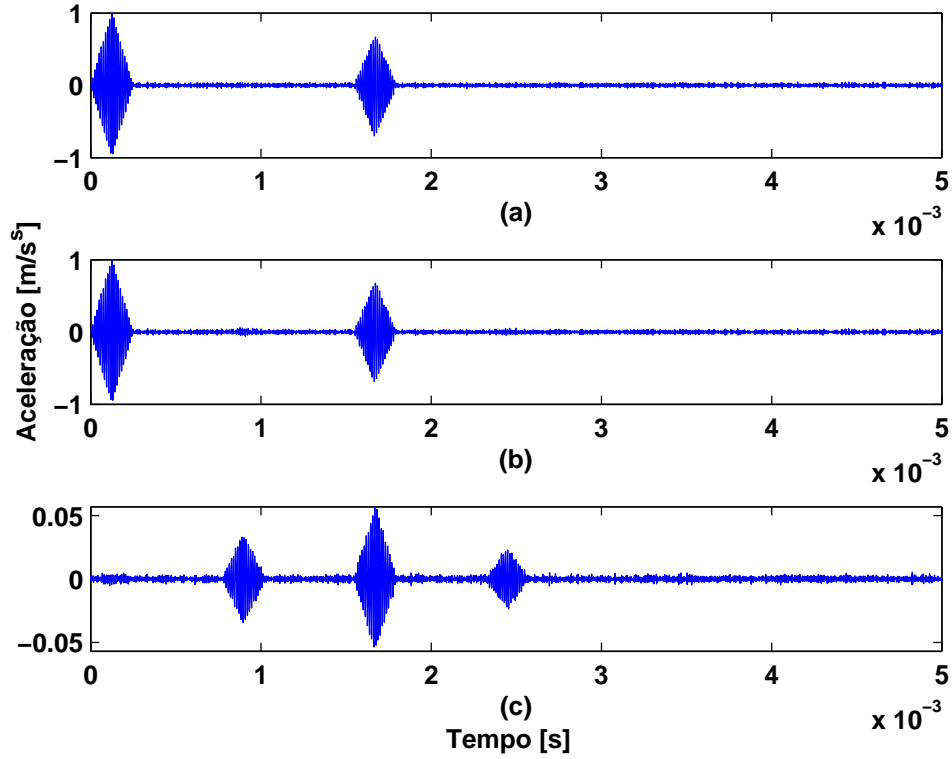


Figura 4.7: Resposta em aceleração no ponto de excitação: *a)* estrutura saudável; *b)* estrutura trincada; *c)* diferença.

Das Figuras 4.7*a* e *b* observa-se que não há uma diferença significativa entre as respostas das estruturas saudável e trincada para esta profundidade de trinca. Assim, neste caso, não é possível identificar claramente uma indicação da presença da trinca na estrutura. Contudo, fazendo-se a diferença entre as respostas (saudável e trincada) obtém-se uma inequívoca indicação da presença da trinca através de um pulso a mais refletido pela mesma. Conhecendo-se a velocidade de propagação da onda e as possíveis mudanças na sua forma de propagação, pode-se facilmente determinar a localização da trinca.

Esta análise observa o comportamento da propagação da onda ao longo do tempo em apenas um ponto. Uma outra análise pode ser feita interpolando-se a resposta ao longo do comprimento da estrutura para diferentes instantes de tempo. As Figuras 4.8 e 4.9 mostram tais resultados para as estruturas saudável e trincada, onde a resposta foi calculada nos nós 1 e 2 do elemento e em seguida interpolada ao longo do comprimento do mesmo com uma discretização de 0.01 m nos instantes de tempo  $t \cong 0.2484, 0.6547$  e  $0.7484$  ms.

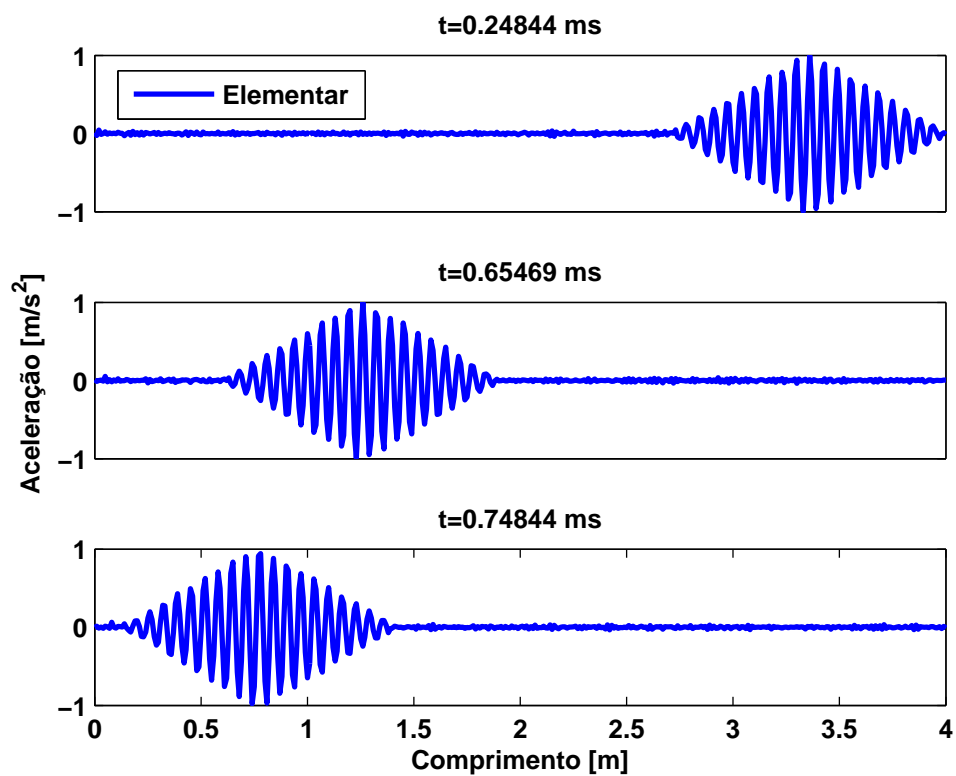


Figura 4.8: Resposta em aceleração ao longo do comprimento do elemento saudável para vários instantes de tempo e força de excitação Pulso-80.



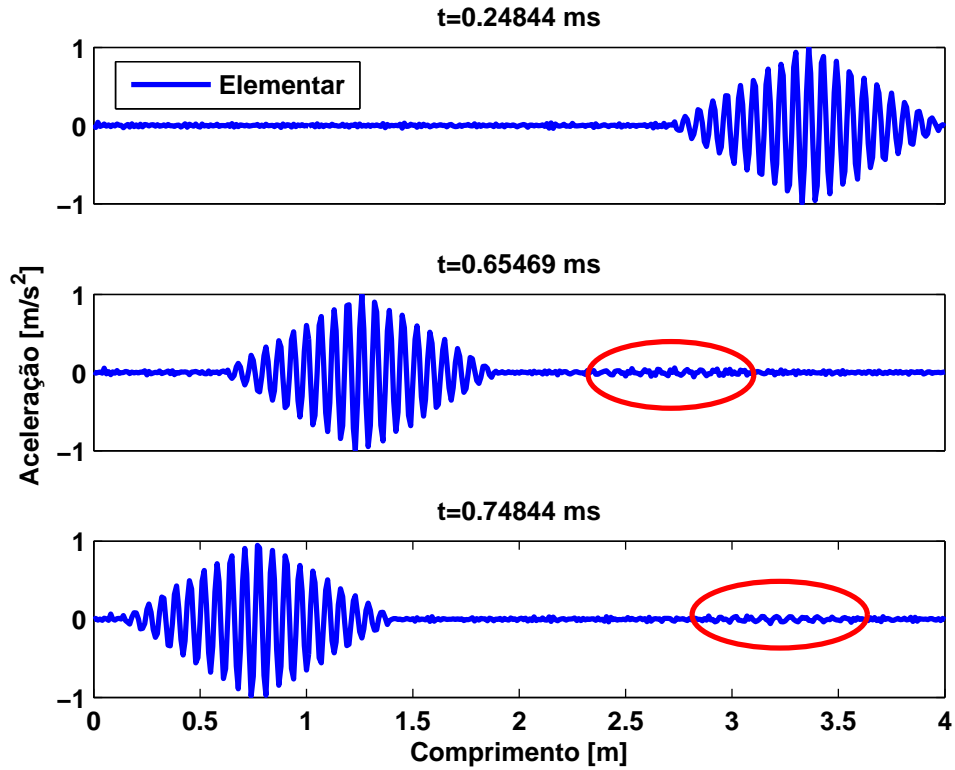


Figura 4.9: Resposta em aceleração ao longo do comprimento do elemento de barra trincado (10%) para vários instantes de tempo e força de excitação Pulso-80.

Aumentando-se a frequência do pulso de excitação, por exemplo aplicando-se o Pulso-160 com frequência de 160 kHz e mantendo-se a profundidade da trinca em 10 %, obtém-se uma indicação mais clara da trinca como mostra a Figura 4.10. A Figura 4.11 mostra também, que mantendo-se o Pulso-80 como excitação mas com uma profundidade de trinca maior, por exemplo 15 %, os resultado da indicação ficam mais evidentes. Contudo, deve ser observado que para o modelo elementar valores da profundidade da trinca abaixo de 10% comprometem uma boa indicação da trinca e a diferença com a resposta da estrutura saudável torna-se necessária.

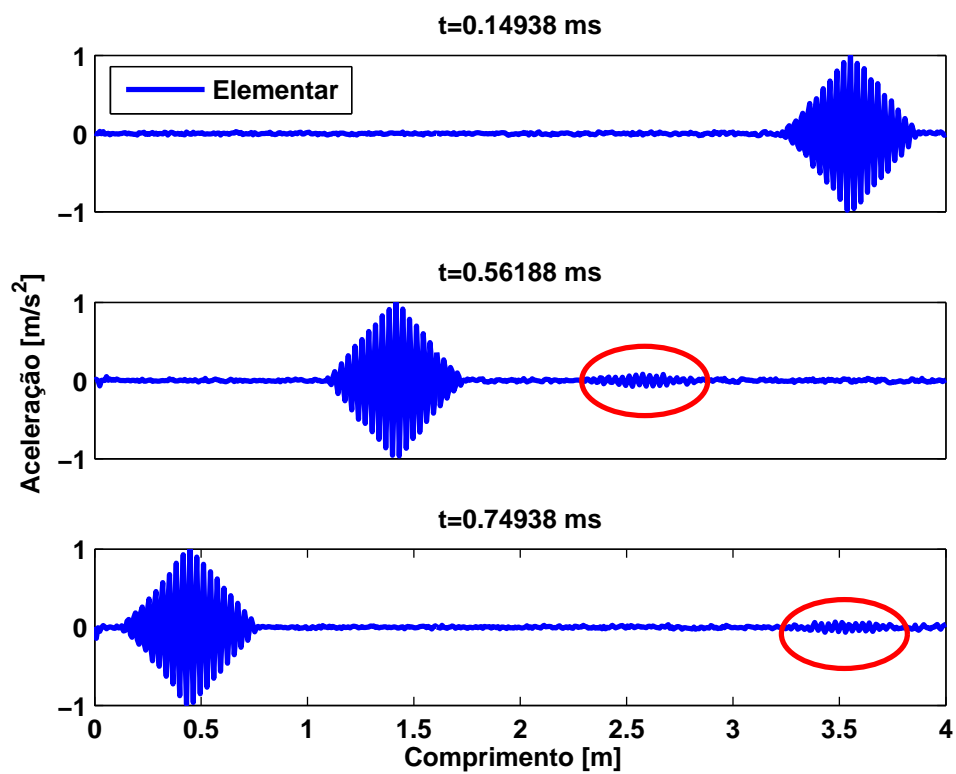


Figura 4.10: Resposta em aceleração ao longo do comprimento do elemento de barra trincado (10%) para vários instantes de tempo e força de excitação de Pulso-160.

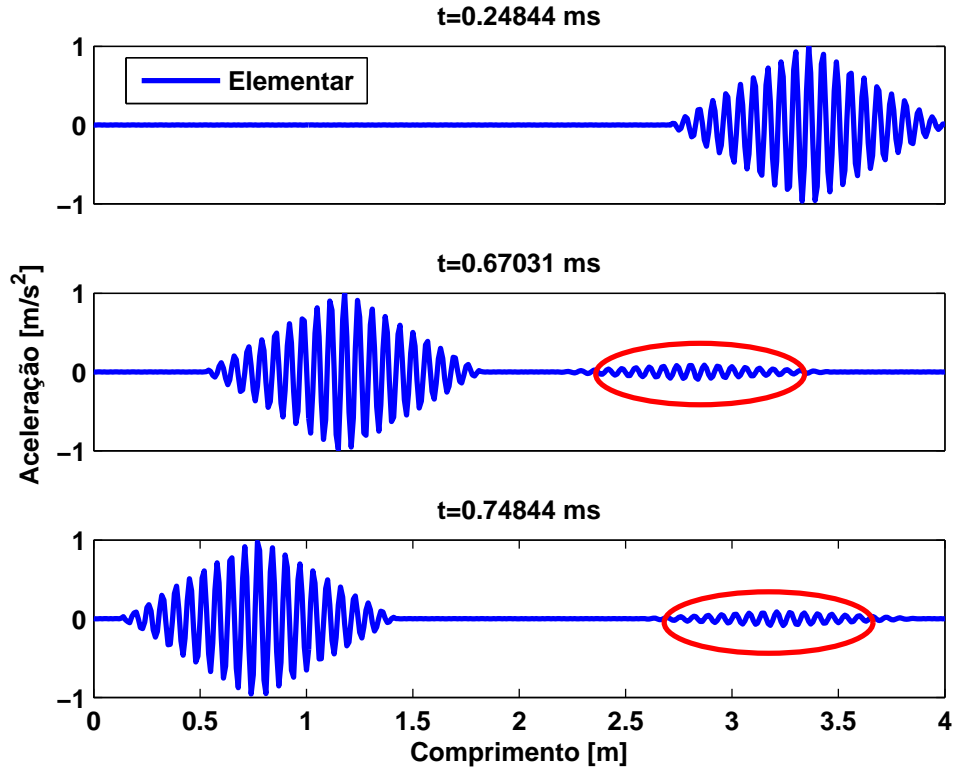


Figura 4.11: Resposta em aceleração ao longo do comprimento do elemento de barra trincado (15%) para vários instantes de tempo e força de excitação Pulso-80.

Pode-se perceber que avaliar a presença da trinca apenas observando a reflexão da onda provocada pela descontinuidade tem um limite de aproximadamente 10%, já fazendo a diferença entre a resposta da barra saudável e a trincada evidencia muito bem a presença da trinca, mas traz outra dificuldade que é obter a resposta para as estrutura saudável.

Na verdade a informação sobre a presença da trinca ainda está contida no sinal coletado; tudo que se deve fazer é encontrar uma forma de extraí-la. A Figura 4.12 mostra uma terceira e bem mais eficiente forma de mostrar a existência da trinca através de uma representação gráfica no tempo e no espaço da propagação da onda. No eixo  $x$  representa-se o tempo, no eixo  $y$  o comprimento da estrutura, e no eixo  $z$  o valor dB da amplitude da onda.

A Figura 4.12a mostra a propagação da onda para o caso saudável, onde observa-se que para uma onda incidente no nó 2 da barra esta propaga-se em direção ao nó 1 onde é integralmente refletida de volta ao nó 2 e absorvida pelo elemento semi-infinito. A Figura 4.12b mostra a propagação da onda para a barra trincada, logo nos primeiros instantes de tempo observa-se a onda propagando ao longo da barra até a sua chegada à trinca, nesse momento a onda se divide

em duas partes, uma parte que reflete para o nó 1 e outra que é transmitida em direção ao nó 2. A parte da onda transmitida ao nó 2 é refletida de volta encontrando novamente a trica e subdividindo-se em duas outras (refletida e transmitida), enquanto a parte refletida para o nó 1 é absorvida pelo elemento semi-infinito. Esse comportamento se repete sucessivamente até a dissipação total da energia da onda.

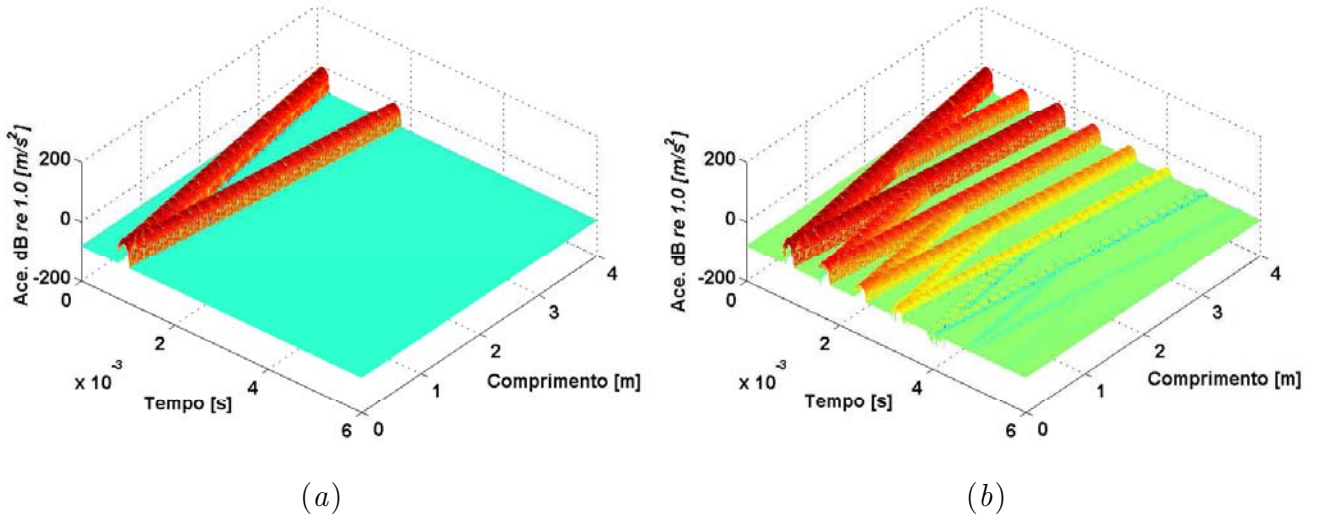


Figura 4.12: Representação tempo-espaço da propagação da onda do modelo elementar: *a*) barra saudável; e *b*) barra trincada, com excitação do Pulso-80.

### 4.3 Exemplos do Modelo de Love

Os exemplos numéricos analisados nesta seção utilizam as mesmas geometrias e propriedades das estruturas apresentadas na seção 4.2.

As Figuras 4.13*a* e 4.13*b* mostram os resultados dos números de onda e das velocidades de ondas, respectivamente, para os modelos de barra, elementar, de Love, e o caso simétrico da placa de Lamb. Os resultados obtidos para os números de onda e as velocidades de ondas demonstram que, para o primeiro modo de propagação na faixa de frequências de zero até próximo de 80 kHz, os três modelos encontram-se bem próximos, divergindo a partir deste ponto. Pode ser visto também que o modelo de Love tende a acompanhar mais de perto o resultado da placa de Lamb, o que representa uma melhor aproximação quando comparado ao modelo de barra elementar. A partir da frequência de 160 kHz surgem simultaneamente dois novos modos de propagação na placa de Lamb que não são representados pelo modelo de barra elementar e nem pelo modelo de barra de Love.

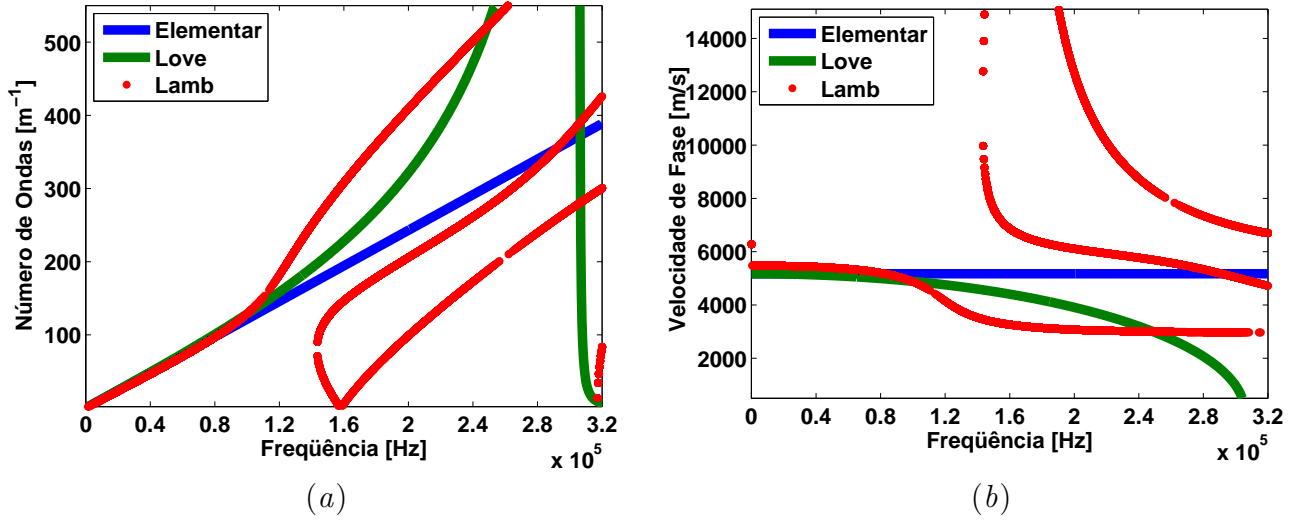


Figura 4.13: Gráficos de dispersão: *a*) número de onda; *b*) velocidade de fase, para o modelo elementar, de Love e da placa de Lamb.

Para validar a implementação computacional dos modelos de barra elementar e de Love, uma comparação dos resultados obtidos com aqueles dos trabalhos de Krawczuk *et al.* (2006a) e Krawczuk *et al.* (2006b) foram feitas. Nesta foram mantidas as mesmas características geometrias, propriedades do material e força de excitação usadas nos referidos artigos, as quais são as mesmas já utilizadas nos exemplos anteriores deste trabalho.

A Figura 4.14a mostra as respostas em aceleração dos modelos elementar e de Love de um barra saudável sujeita a uma excitação Pulso-80, apresentado no artigo de Krawczuk *et al.* (2006a). A Figura 4.14b mostra as respostas para os mesmos modelos obtidas com o programa implementado no Matlab. Uma comparação visual destes resultados permite observar uma boa concordância.

A Figura 4.15a mostra as respostas em aceleração dos modelos elementar e de Love de um barra trínca, com profundidade de trinca de 20% da altura da secção transversal, posicionada no meio da barra, apresentada no artigo de Krawczuk *et al.* (2006b). A Figura 4.15b mostra as respostas para os mesmos modelos utilizando-se o programa implementado no Matlab. Novamente, obteve-se uma boa concordância entre os resultados.

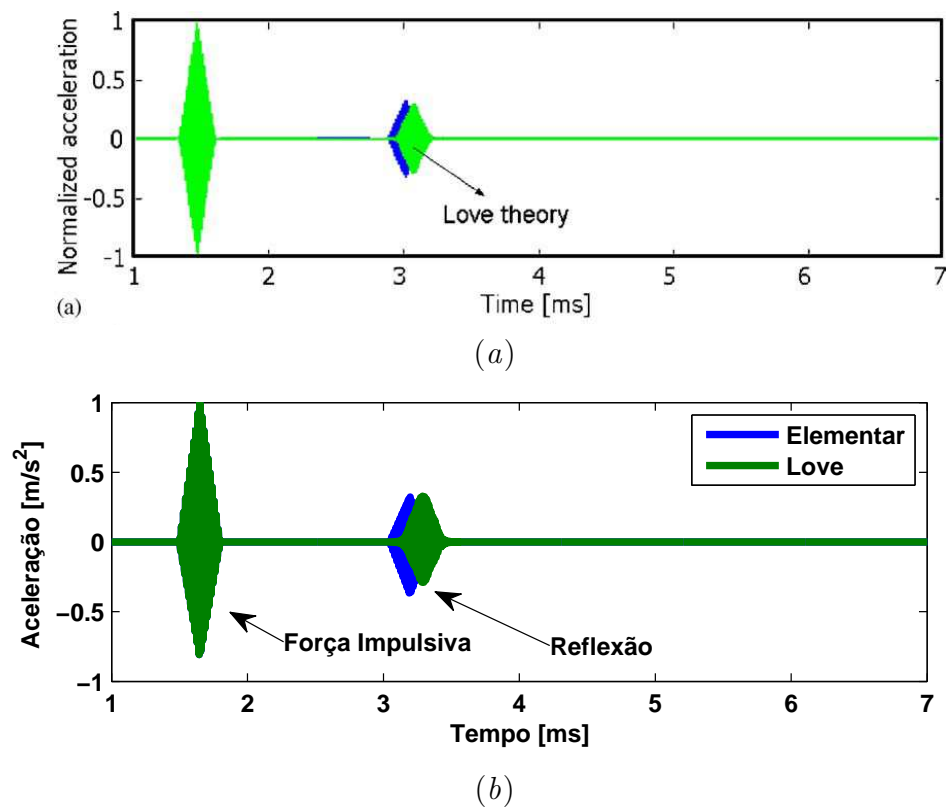


Figura 4.14: Resposta à excitação Pulso-80 dos modelos elementar e de Love para uma barra saudável: *a*) resultados segundo Krawczuk *et al.* (2002a) *b*) resultados segundo o programa implementado.

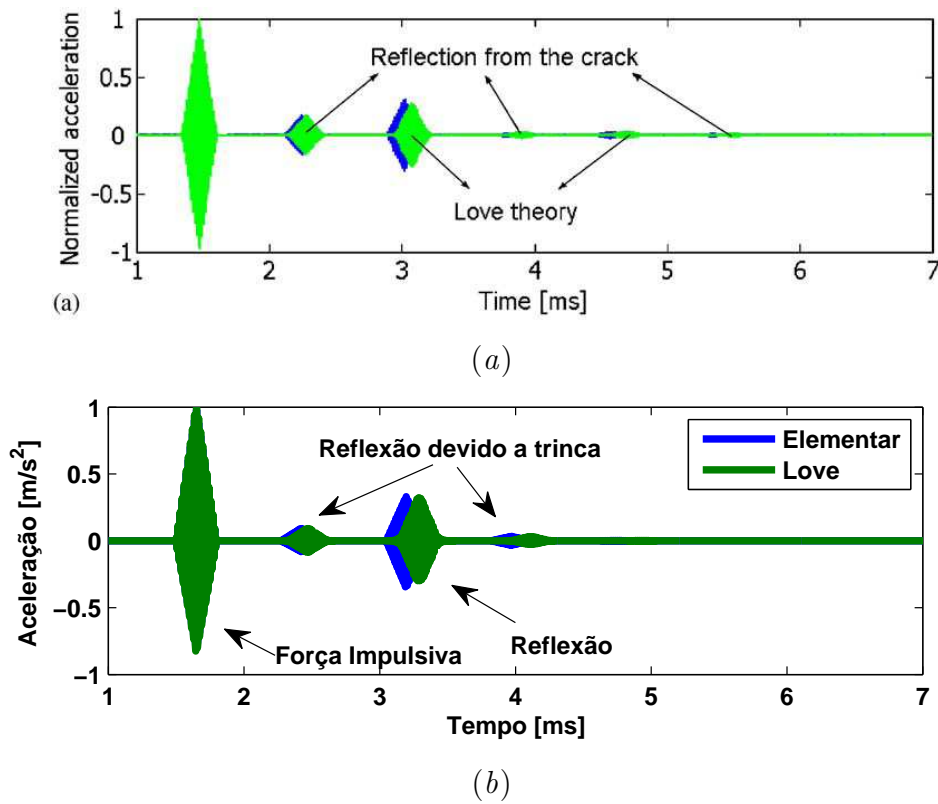


Figura 4.15: Resposta ao Pulso-80 dos modelos elementar e de Love para uma barra trincada: a) Resultados segundo Krawczuk *et al.* (2002b) b) Resultados segundo o programa implementado.

As respostas em aceleração obtidas para os modelos elementar e de Love são mostradas nas Figuras 4.16a e b usando-se as forças impulsivas Pulso-80 e Pulso-160, respectivamente. Para facilidade de comparação, as respostas em aceleração foram normalizadas unitariamente. Nas Figuras 4.16a e b o primeiro pulso refere-se à resposta no ponto de aplicação da força de excitação (nó 2) que para os dois modelos as amplitudes são coincidentes. O segundo pulso é devido a reflexão da onda na extremidade esquerda da barra (nó 1). Um comportamento similar das respostas pode ser observado. Contudo, a propagação de onda do modelo elementar é mais rápida que a do modelo de Love. Esse fato se deve à velocidade de propagação de onda para o modelo de Love ser menor que a velocidade de propagação de onda para a modelo elementar. Essa diferença é ampliada com o aumento da frequência (Figura 4.13b).

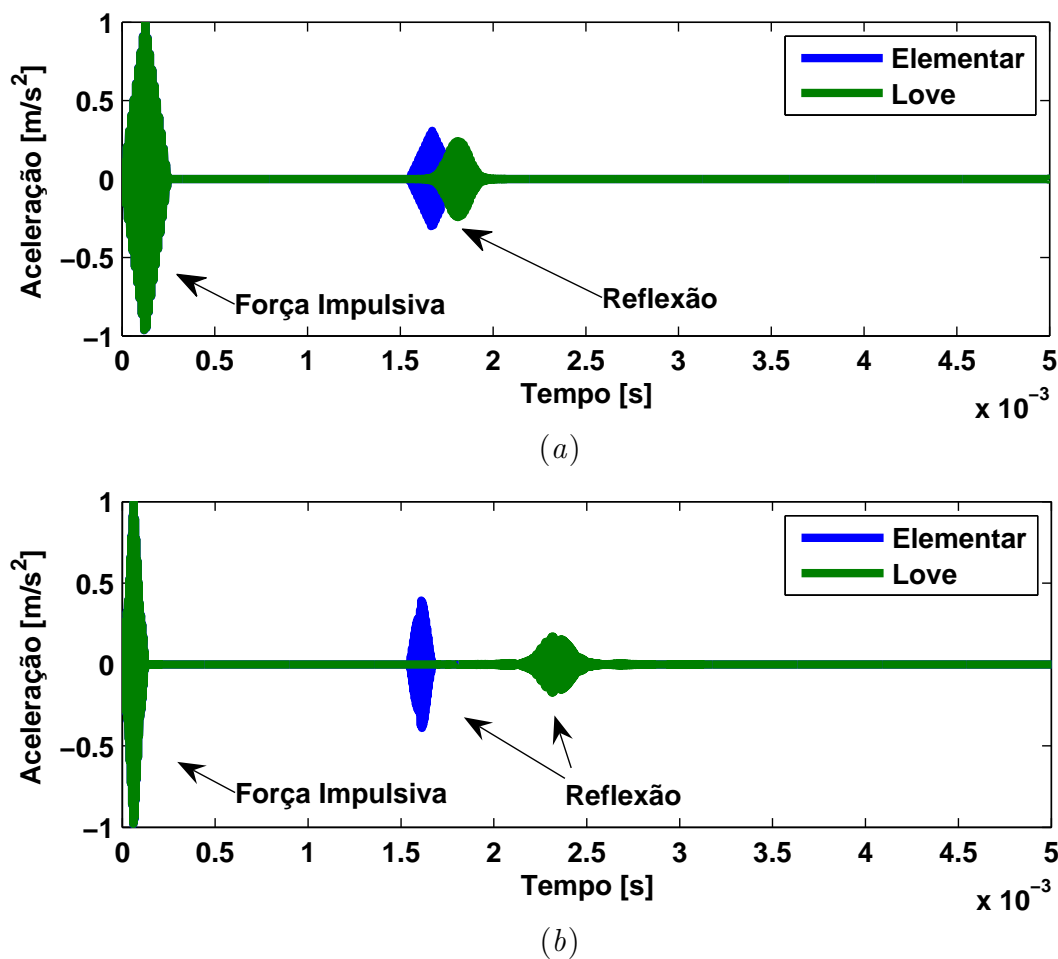


Figura 4.16: Respostas dos modelos elementar e de Love no nó 2 com força de excitação: a) Pulso-80; b) Pulso-160.

As respostas em aceleração normalizadas obtidas para o modelo elementar e de Love trincados, com profundidade da trinca de 20 % da altura da seção transversal da barra, estão mostradas nas Figuras 4.17a e b para as forças de excitação Pulso-80 e Pulso-160, respectivamente. Nas Figuras 4.17a e b o primeiro pulso refere-se a força de excitação. O segundo pulso representa uma reflexão devido a presença da trinca no meio da barra e o terceiro pulso é devido a reflexão da onda na extremidade esquerda da barra. Novamente, pode-se observar que a propagação de onda do modelo elementar é mais rápida que a do modelo de Love.



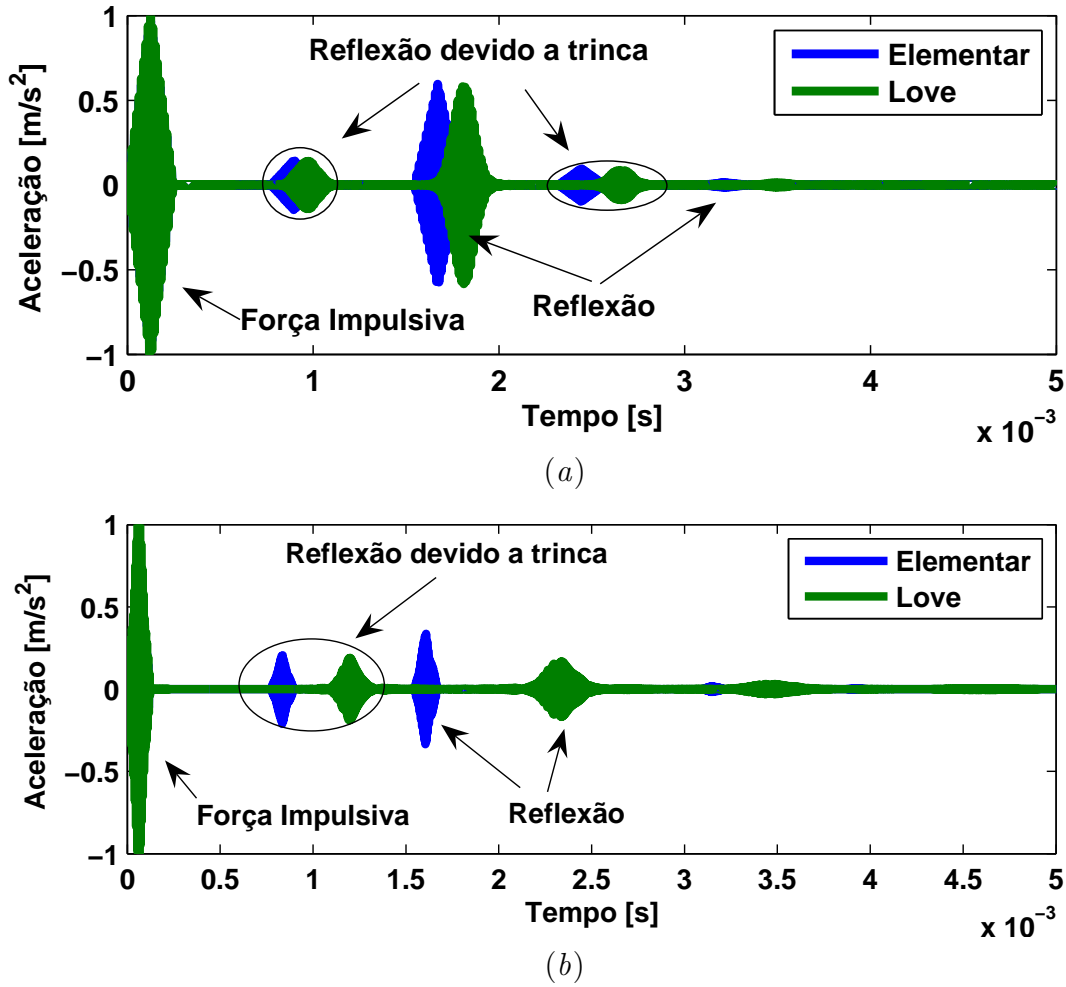


Figura 4.17: Respostas no nó 2 dos modelos elementar e de Love trincados com força de excitação: a) Pulso-80; b) Pulso-160.

Interpolando a resposta ao longo do comprimento da estrutura com um  $\Delta x = 0.01$  m, pode-se ver claramente o comportamento da propagação das ondas em vários instantes de tempo. É possível notar a divisão do pulso inicial em dois outros quando passa pela trinca ( $L_1 = 2.0$  m), um pulso que é transmitido após a posição da trinca e outro que é refletido de volta ao ponto inicial de excitação da barra (Figura 4.18).

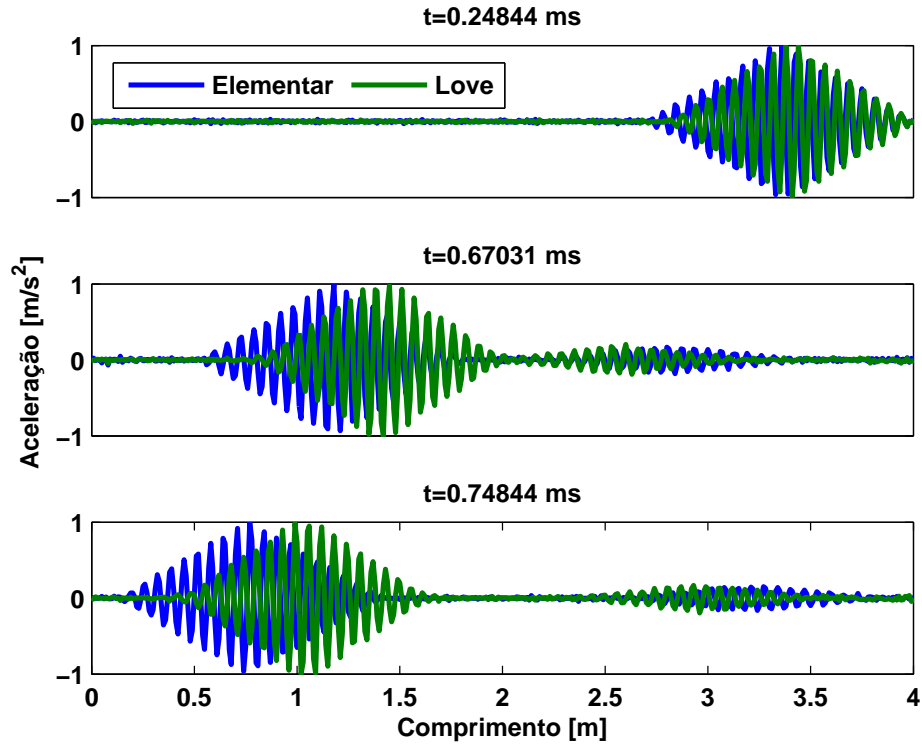


Figura 4.18: Resposta ao Pulso-80 dos modelos elementar e de Love para uma barra trincada em função do comprimento da barra para diferentes instantes de tempo.

A fim de incluir os efeitos do erro na medição foi adicionado ao Pulso-80 um ruído aleatório com amplitude de 2% do seu valor máximo. Também, para avaliar a sensibilidade do modelo, foi imposta uma profundidade da trinca menor, 10% da altura da sua seção transversal. A Figura 4.19 mostra as respostas em aceleração no ponto de excitação (nó 2) para: a estrutura saudável; a estrutura trincada; e a diferença entre as respostas das estruturas saudável e trincada.

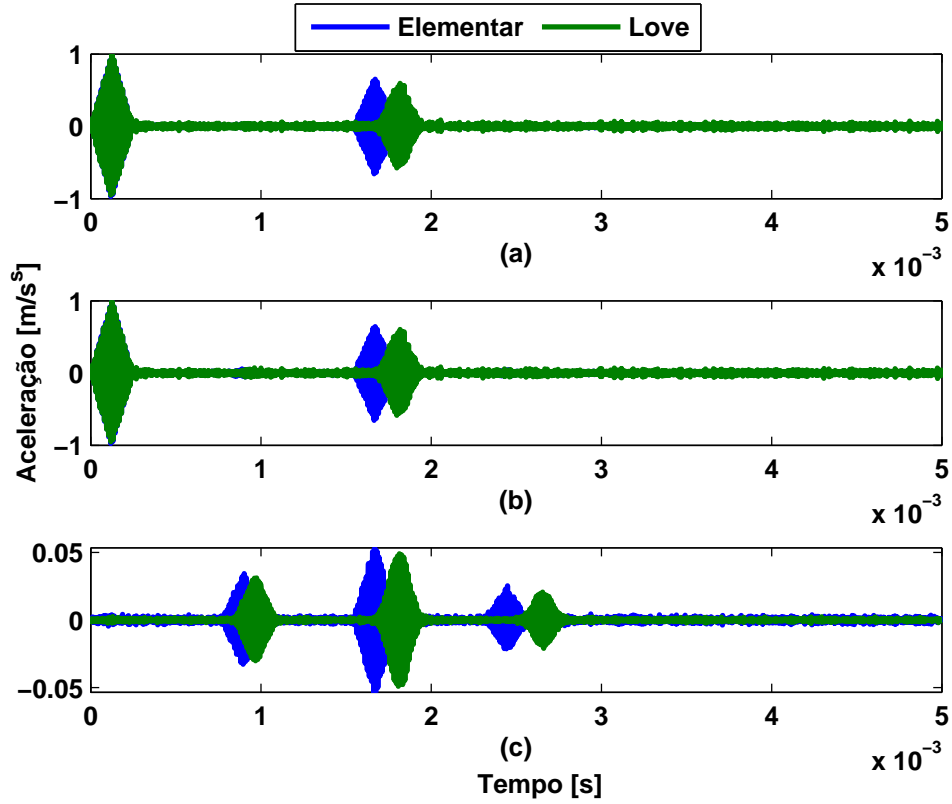
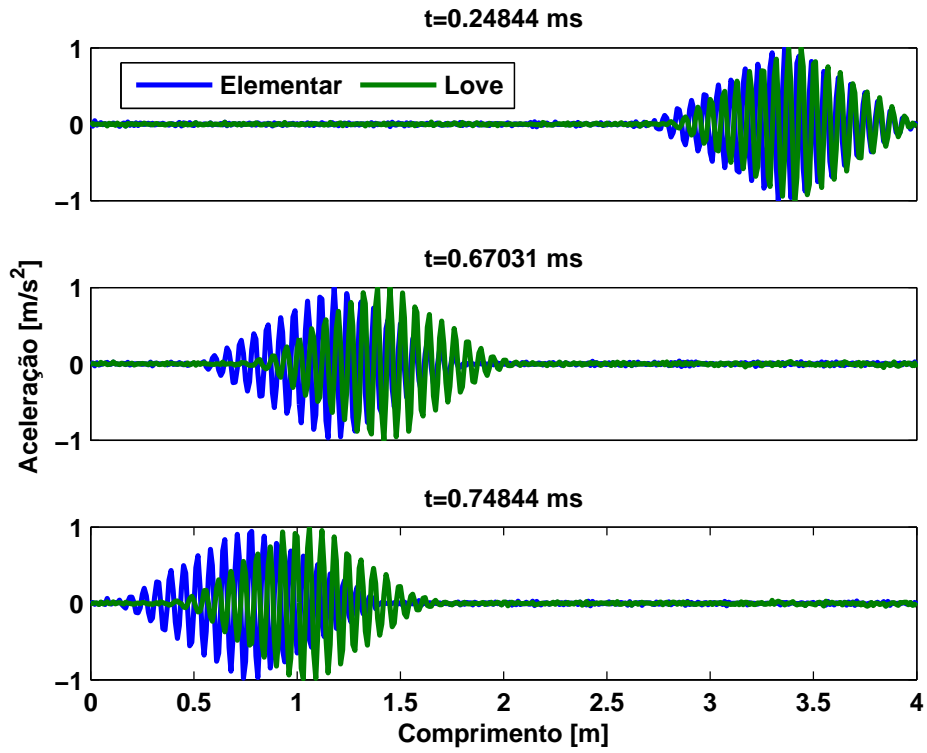
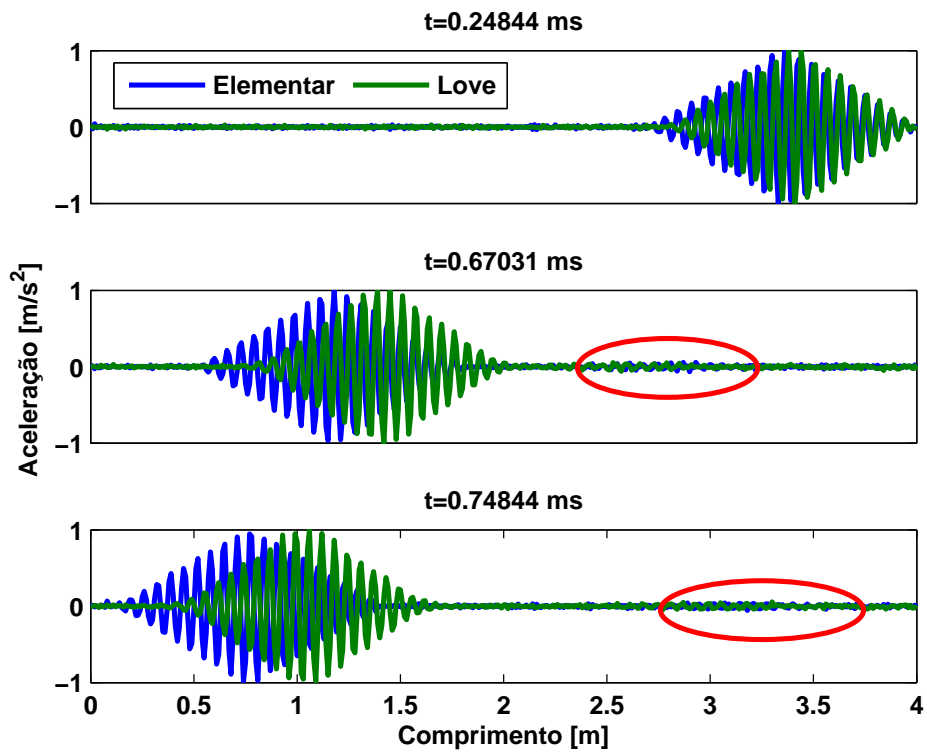


Figura 4.19: Resposta ao Pulso-80 no ponto de excitação para: *a*) estrutura saudável; *b*) estrutura trincada; *c*) diferença saudável-trincada.

Das Figuras 4.19*a* e *b* observa-se que não há uma diferença significativa entre as respostas das estruturas saudável e trincada para esta profundidade de trinca. Assim, neste caso, não é possível identificar claramente uma indicação da presença da trinca na estrutura. Contudo, fazendo-se a diferença entre as respostas saudável e trincada obtém-se uma inequívoca indicação da presença da trinca através de um pulso a mais refletido pela mesma. Conhecendo-se a velocidade de propagação da onda e as possíveis mudanças na sua forma de propagação, pode-se facilmente determinar a localização da trinca. Esta análise observa o comportamento da propagação da onda ao longo do tempo em apenas um ponto. Uma outra análise pode ser feita interpolando-se a resposta ao longo do comprimento da estrutura para diferentes instantes de tempo. As Figuras 4.20*a* e *b* mostram tais resultados para as estruturas saudável e trincada, onde a resposta foi calculada nos nós 1 e 2 do elemento e em seguida interpolada ao longo do comprimento do mesmo com uma discretização de 0.01 m nos instantes de tempo  $t \cong 0.2484$  0.6503 e 0.7484 ms. Contudo, a indicação da trinca ainda é pouco perceptível como destacado na Figura 4.20*b*.



(a)



(b)

Figura 4.20: Resposta ao Pulso-80 ao longo do comprimento em diferentes instantes de tempo para a estrutura: a) saudável; b) trincada com 10%,.

Aumentando-se a frequência do pulso de excitação, por exemplo aplicando-se um Pulso-160 e mantendo-se a profundidade da trinca em 10%, obtém-se uma indicação mais clara da trinca como mostra a Figura 4.21. A Figura 4.22 mostra também, que mantendo-se o Pulso-80 como excitação mas com uma profundidade de trinca maior, por exemplo 15%, os resultado da indicação ficam mais evidentes. Contudo, deve ser observado que para o modelo elementar valores da profundidade da trinca abaixo de 10% comprometem uma boa indicação da trinca e a diferença estrutura saudável-trincada torna-se necessária.

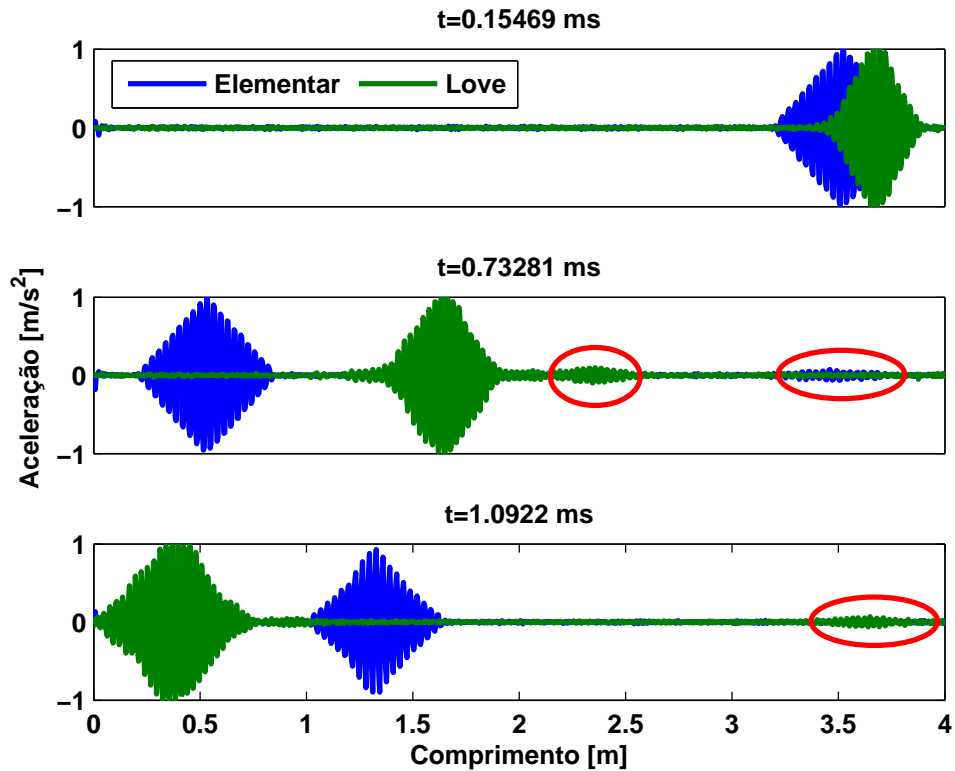


Figura 4.21: Resposta em aceleração ao longo do comprimento do elemento de barra trincado (10%) para vários instantes de tempo e força de excitação de Pulso-160.

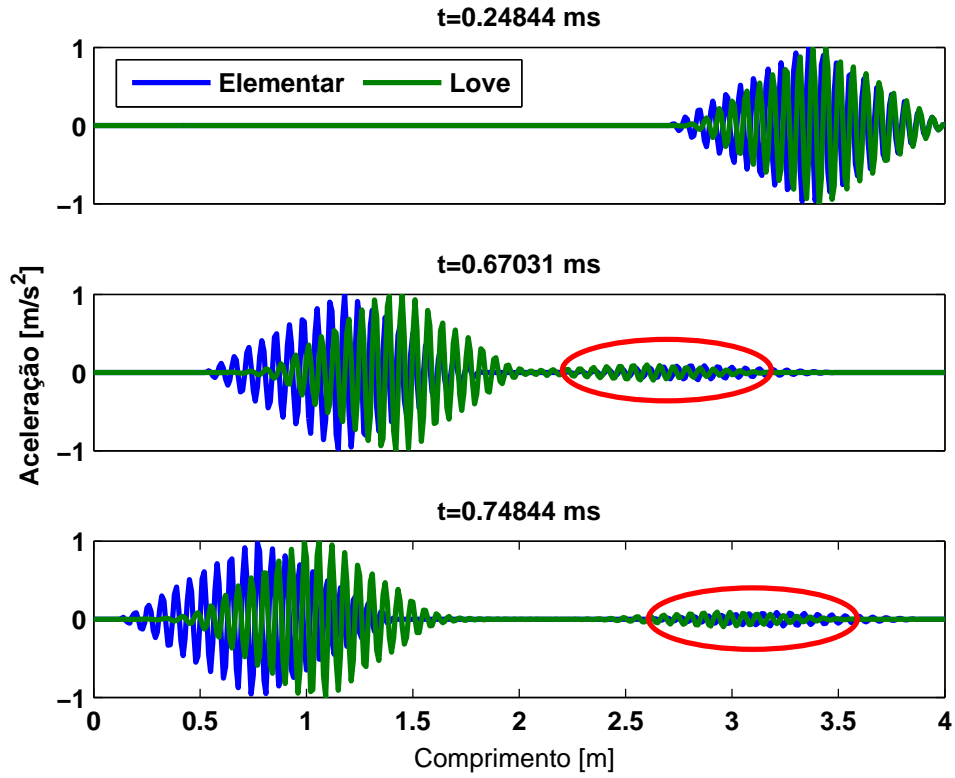


Figura 4.22: Resposta em aceleração ao longo do comprimento do elemento de barra trincado (15%) para vários instantes de tempo e força de excitação Pulso-80.

A representação tempo-espaço para o modelo de Love é mostrada na Figura 4.23, onde a Figura 4.23a e b mostram resposta para a barra saudável e trincada, respectivamente. O comportamento aqui é muito semelhante aquele apresentado para o modelo elementar. A força de excitação utilizada foi o Pulso-80.

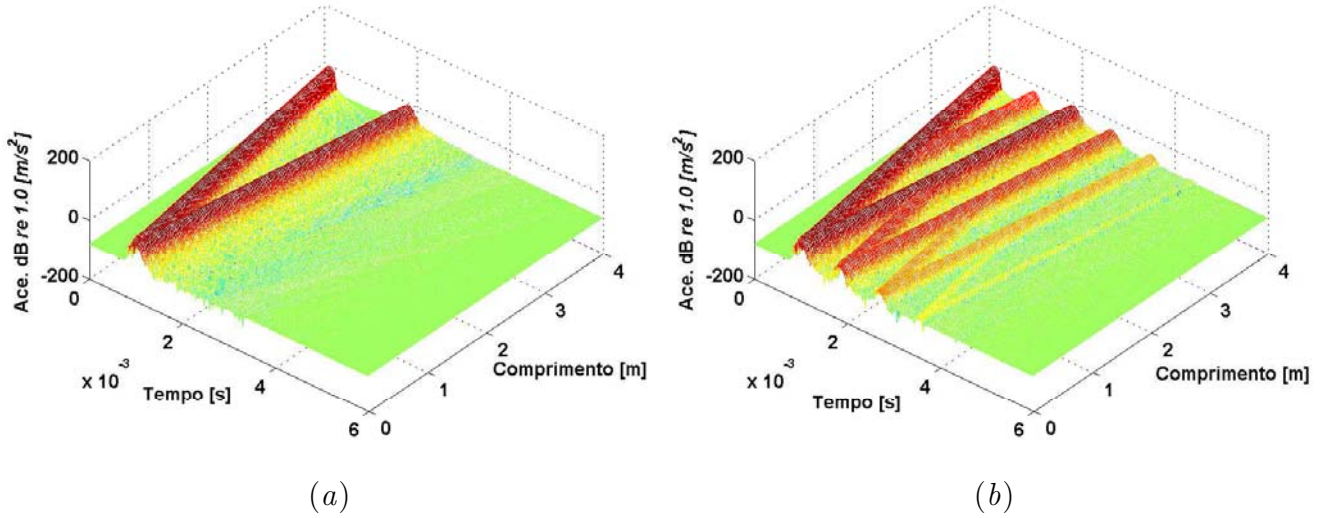


Figura 4.23: Representação tempo-espço da propagação da onda no modelo de barra de Love: *a*) saudável; e *b*) trincada, com excitação do Pulso-80.

## 4.4 Exemplos do Modelo de Mindlin-Herrmann

Os exemplos numéricos analisados nesta seção utilizam as mesmas geometrias e propriedades das estruturas apresentadas na seção 4.2.

As Figuras 4.24*a*, *b* e *c* mostram os gráficos de número de onda, velocidade de fase e velocidade de fase ampliada em função da frequência para os modelos de barra: elementar; de Love; de Mindlin-Herrmann; do caso simétrico da placa de Lamb. Os resultados obtidos demonstram que abaixo da frequência de corte,  $\omega_c = 139, 2kHz$ , as curvas referentes ao primeiro modo de propagação dos quatro modelos encontram-se próximas. A Figura 4.24*c* mostra com maior detalhe que nesta faixa de frequências o modelo de Mindlin-Herrmann apresenta uma melhor aproximação do modelo de placa de Lamb quando comparado aos modelos de barra elementar e de Love. Acima da frequência de corte o modelo de Mindlin-Herrmann apresenta um segundo modo cuja curva de variação encontra-se entre aquelas dos dois modos exatos (placa de Lamb), enquanto os modelos de barra elementar e de Love não conseguem representar nenhum destes modos. Pode-se observar ainda, que acima da frequência de corte o segundo modo do modelo de Mindlin-Herrmann é propagante ( $k_2$  é real), mas não se aproxima de nenhum dos outros dois modos exatos. Parece que a adição de um segundo modo no modelo melhora a estimativa do comportamento do primeiro modo de Mindlin-Herrmann em relação ao primeiro exato, enquanto o segundo modo é uma aproximação grosseira de um valor médio dos outros dois modos exatos. A Figura 4.24*d* mostra a velocidade de

grupo para os modelos de barra: elementar, de Love e de Mindlin-Herrmann, onde pode ser visto que depois da frequência de corte o segundo modo de propagação do modelo de Mindlin-Herrmann é menor do que primeiro, mas aumenta rapidamente com o aumento da frequência tornando-se maior do que ele.

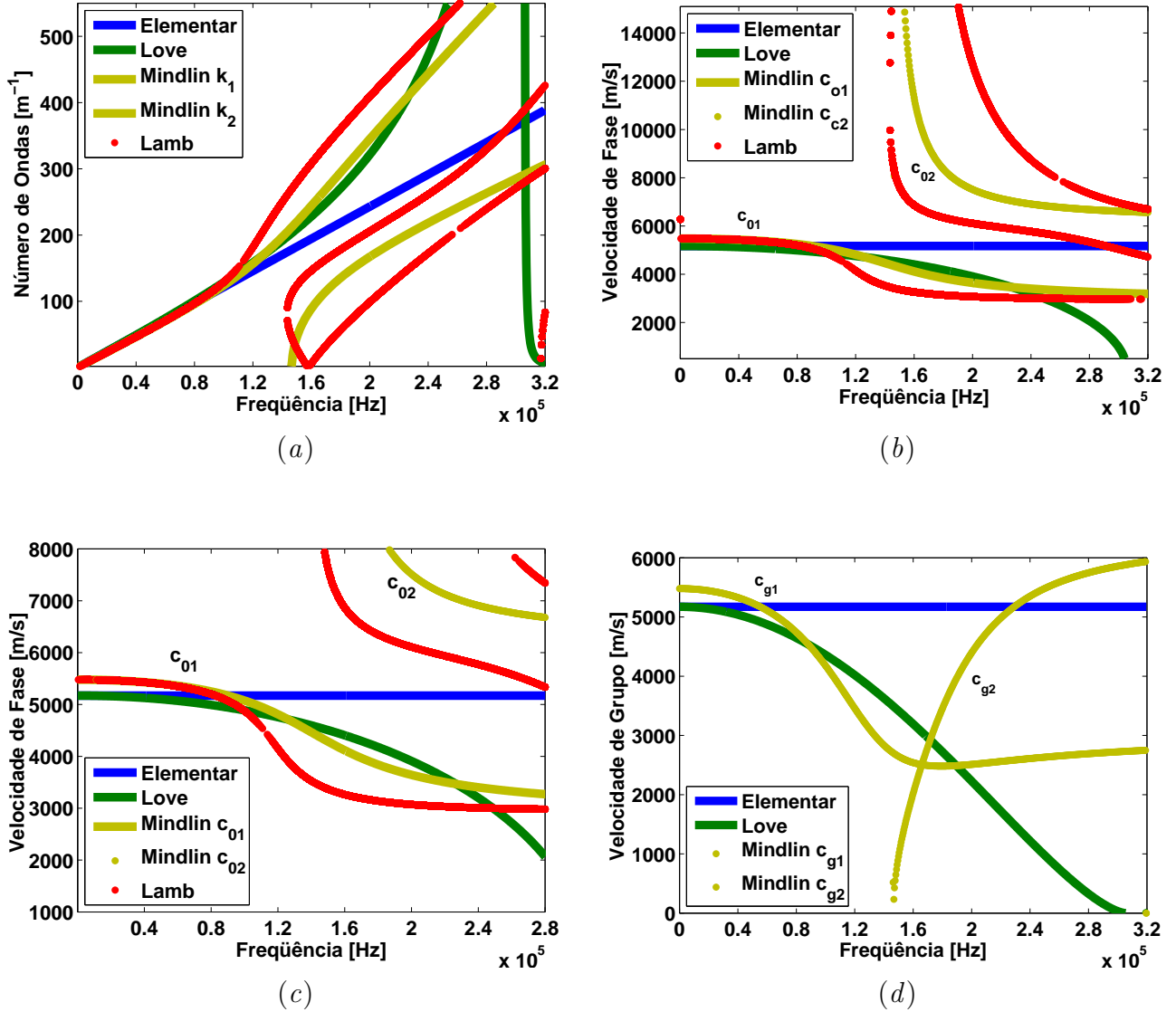


Figura 4.24: Gráficos de dispersão: a) número de onda; b) velocidade de fase ; c) velocidades de fase ampliada ; e d) velocidade de grupo .

Para a validação do modelo de barra de Mindlin-Herrmann implementado computacionalmente, comparações com os resultados dos trabalhos de Krawczuk *et al.* (2006a) e Krawczuk *et al.* (2006b) foram realizadas. Da mesma forma como no caso do item 4.3 mantiveram-se as mesmas características geométricas, propriedades do material e força de excitação usadas nos referidos artigos e nos exemplos anteriores deste trabalho.



A Figura 4.25 mostra as respostas em aceleração no nó 2 usando a força de excitação Pulso-80, com normalização unitária, obtidas para os modelos elementar e de Mindlin-Herrmann. As Figuras 4.25a e b mostram os resultados para uma barra saudável apresentados no artigo do Krawczuk *et al.* (2006a) e obtidos com o programa implementado no Matlab, respectivamente. Essas mostram um padrão de comportamento semelhante aqueles já observados para os modelos elementar e de Love, onde o primeiro pulso refere-se a força de excitação e o segundo pulso é devido à reflexão da onda na extremidade esquerda da barra (nó 1). Porém, na resposta apresentada nos trabalhos do Krawczuk surge um terceiro pulso (circulado em vermelho), o qual não aparece nos resultados calculados pelo programa implementado. Segundo Krawczuk, esse pulso é devido o segundo modo de propagação da onda. Entretanto, observando-se a Figura 4.26 que apresenta a parte real e imaginária do número de onda para o modelo de Mindlin-Herrmann, fica claro que acima da frequência de corte ( $\omega_c = 139,1$  kHz) o número de onda do segundo modo ( $k_2$ ) será um número real puro (onda propagante), enquanto que abaixo dessa será um número imaginário puro caracterizando uma onda evanescente. Para barras esbeltas, tal como a do problema aqui analisado, o segundo modo de propagação não é normalmente observado (Doyle (1997)).

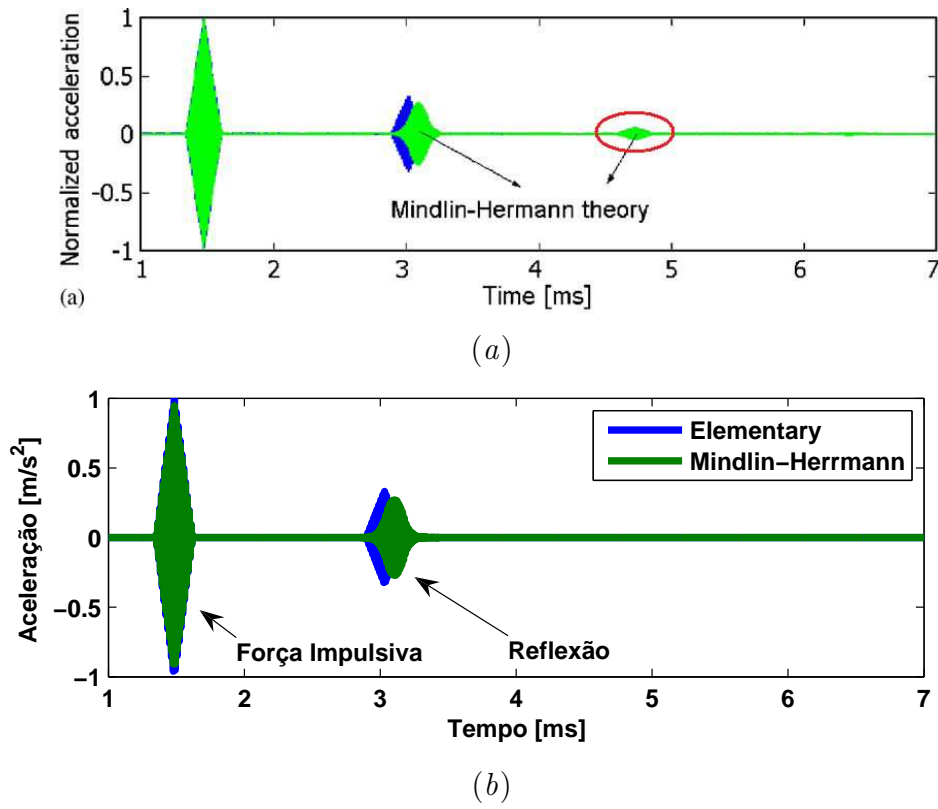


Figura 4.25: Resposta ao Pulso-80 dos modelos elementar e de Mindlin-Herrmann para uma barra saudável: *a*) resultados segundo Krawczuk *et al.* (2002a) *b*) resultados segundo o programa implementado.

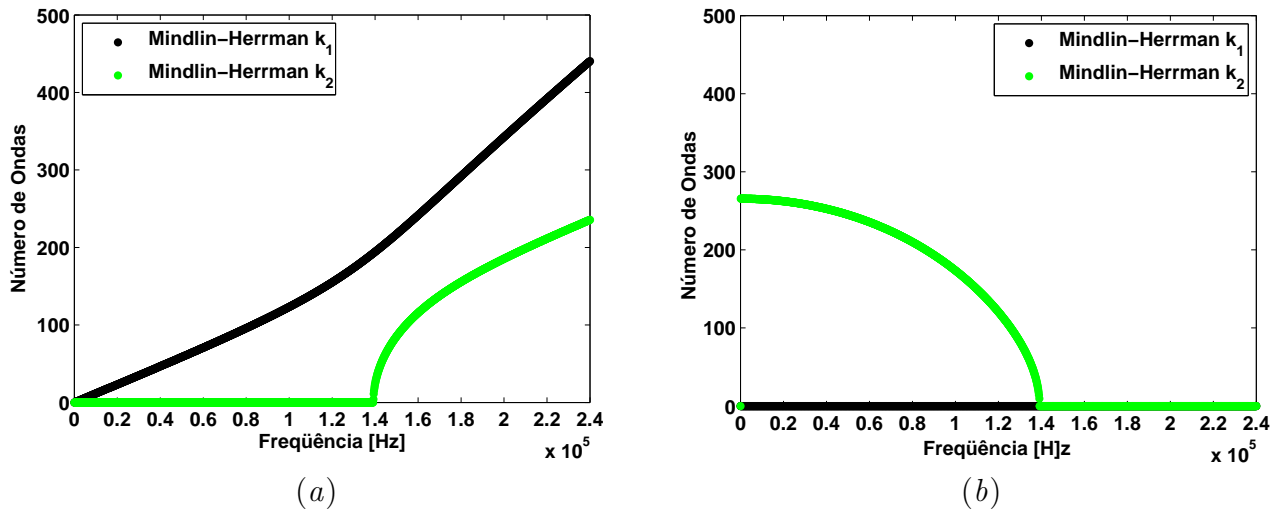


Figura 4.26: Número de ondas de Mindlin-Herrmann: *a*) parte real *b*) parte imaginária.

As Figuras 4.27*a* e *b* mostra os resultados para uma barra trincada, com uma profundidade da trinca de 20% de  $h$ , apresentados no artigo de Krawczuk *et al.* (2006b) e obtidos no programa implementado no Matlab, respectivamente. Nesse caso, também, os resultados mostram um padrão

de comportamento semelhante aos dos modelos elementar e de Love trincado, onde o primeiro pulso refere-se a força de excitação, o segundo pulso é devido a reflexão na trinca e o terceiro pulso refere-se a reflexão da onda na extremidade esquerda da barra (nó 1). Para este caso, os resultados apresentados por Krawczuk *et al.* (2006b) mostram um comportamento similar ao da barra saudável com o aparecimento de um pulso adicional (Figura 4.27a), o que não se verifica no programa implementado.

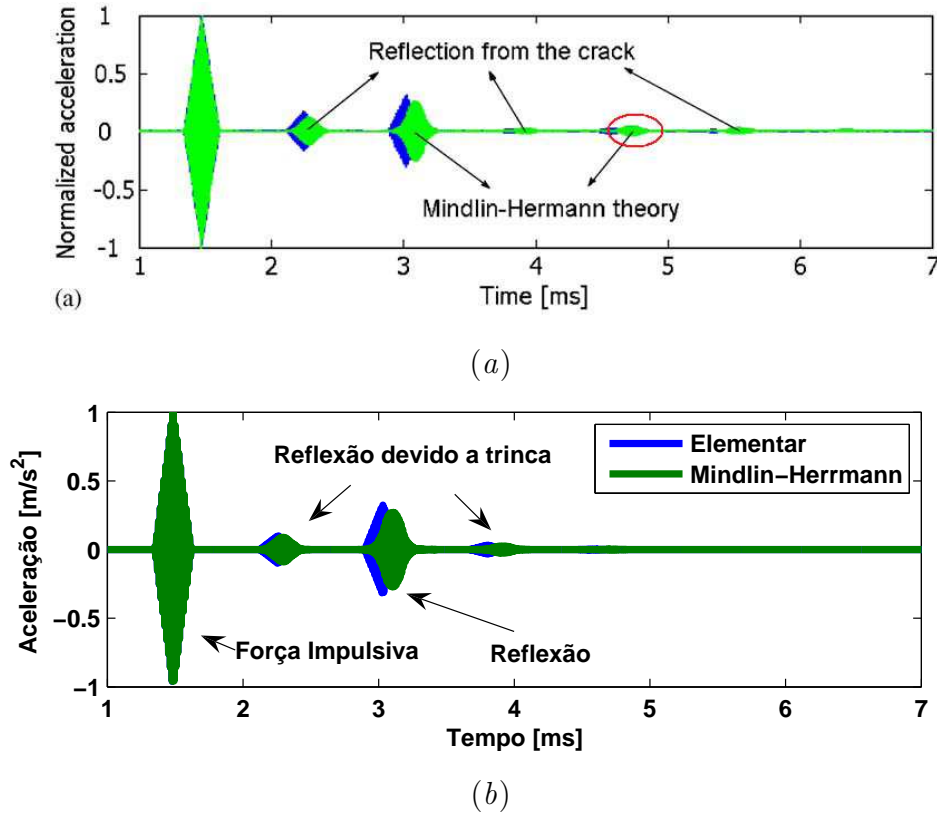


Figura 4.27: Resposta ao Pulso-80 dos modelos elementar e de Mindlin-Herrmann para uma barra trincada: a) Resultados segundo Krawczuk *et al.* (2002b) b) Resultados segundo o programa implementado.

As Figuras 4.28a e b mostram a representação tempo-espço do modelo de Mindlin-Herrmann a resposta em aceleração a uma força de excitação Pulso-80 de uma barra saudável e trincada, respectivamente. O comportamento aqui observado não difere muito daqueles apresentados para os modelos elementar e de Love.

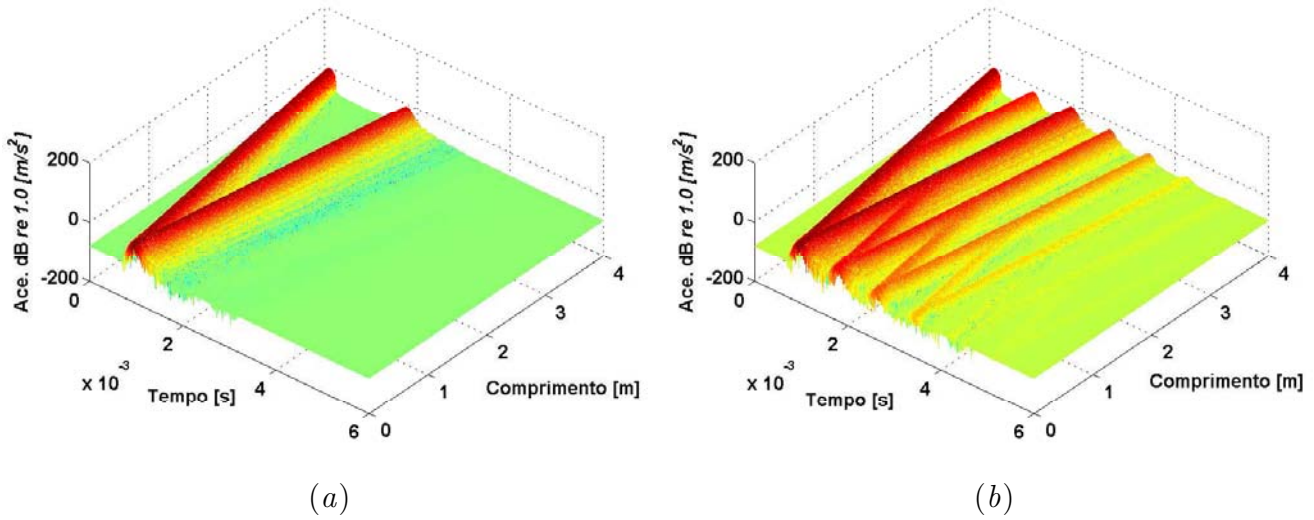


Figura 4.28: Representação tempo-espço da propagação da onda no modelo de barra de Mindlin-Herrmann: *a*) saudável; e *b*) trincada, com excitação do Pulso-80.

Para observar a contribuição dos modos de ordem mais alta do modelo de Mindlin-Herrmann, o qual só ocorre em faixas de frequências acima da frequência de corte, foi criado mais um sinal de excitação. Para este exemplo criou-se o terceiro sinal de excitação chamado de Pulso-250, o qual tem as mesmas características definidas no item 4.2, porém com frequência central de 250 kHz (Figura 4.29).

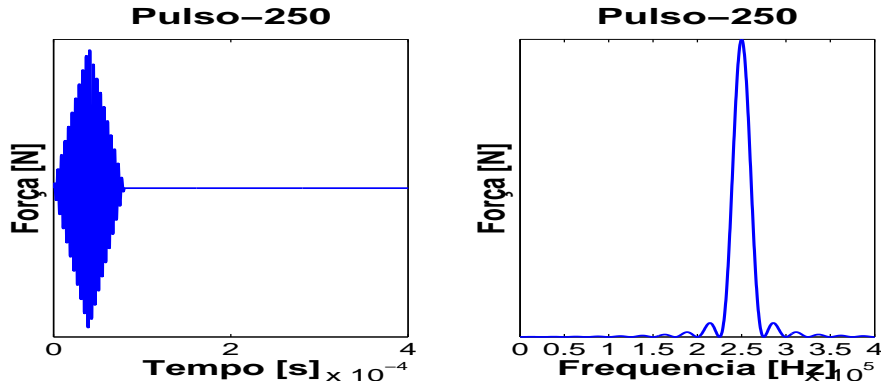


Figura 4.29: Sinal da força de excitação Pulso-250.

A Figura 4.30 mostra a resposta à excitação do Pulso-250 para os modelos elementar e de Mindlin-Herrmann calculadas em diferentes valores de tempo. Neste caso, as respostas foram obtidas por interpolação ao longo do comprimento da estrutura com um  $\Delta x = 0.005$  m. Observa-se que a resposta do modelo de Mindlin-Herrmann apresenta um pulso a mais do que o modelo elementar. Este pulso adicional caracteriza o segundo modo de propagação. Contudo, deve-se

identificar de forma inequívoca qual pulso corresponde a que modo. O primeiro pulso é identificado como o segundo modo, pois da Figura 4.24*d* observa-se que na frequência de 250 kHz este modo tem maior velocidade de grupo (Mindlin-Herrmann  $k_2$ ). Da Figura 4.24*a* observa-se que nessa frequência o número de onda  $k_2 < k_1$ , o que produzirá uma amplitude da aceleração maior para o segundo modo tendo em vista a amplitude da resposta ser inversamente proporcional ao número de onda (vide Equação (3.113) no Capítulo 3). Um raciocínio análogo confirma o segundo pulso como sendo correspondente ao primeiro modo.

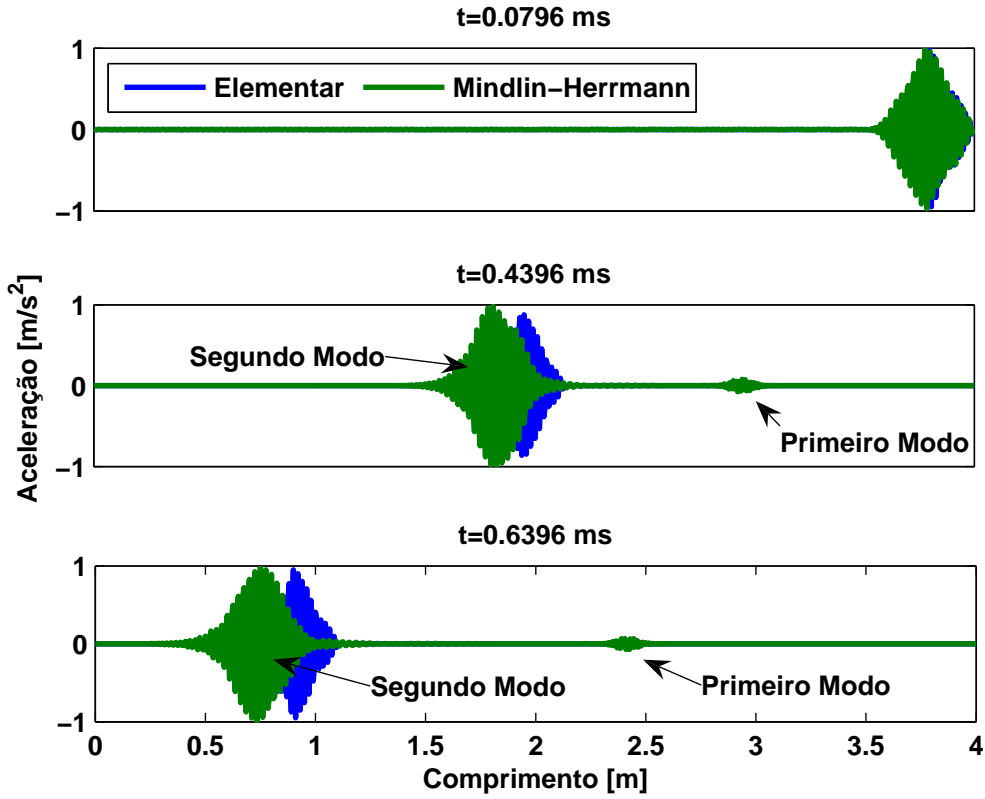


Figura 4.30: Resposta para vários instantes de tempo ao longo do comprimento da barra para o Pulso-250.

As Figuras 4.31*a* e *b* mostram uma representação tempo-espaço das respostas ao Pulso-250 para a barra saudável. Uma observação importante neste caso é que para cada onda de excitação ou reflexão duas ondas serão propagadas correspondendo ao primeiro e segundo modo de propagação.

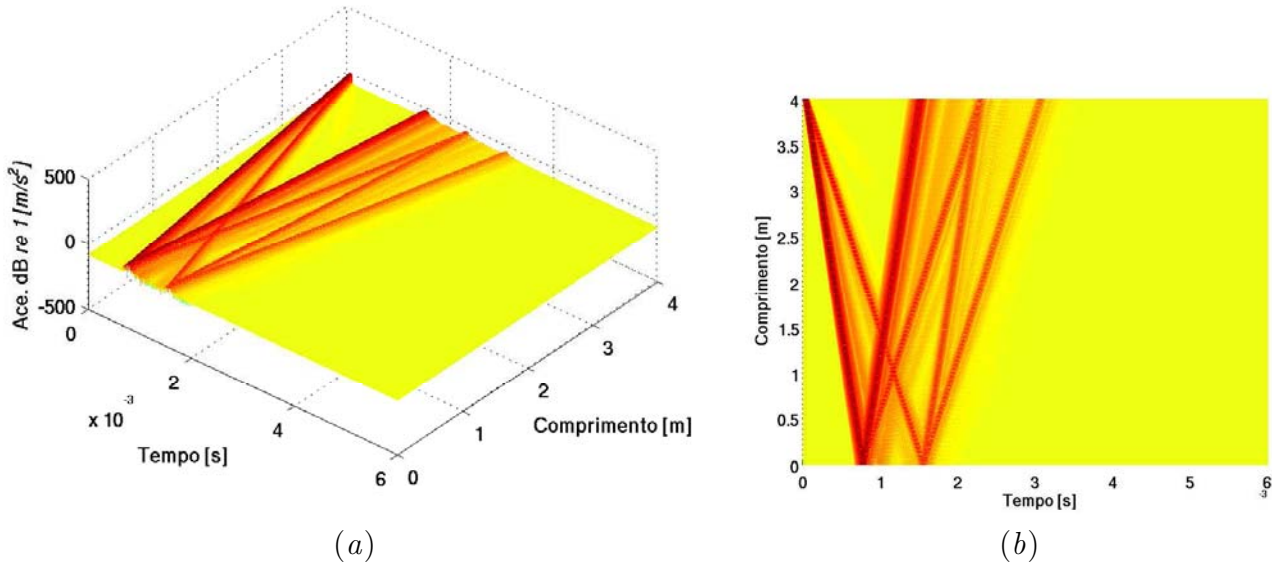


Figura 4.31: Representação tempo-espço da propagação da onda no modelo de Mindlin-Herrmann de uma barra saudável com excitação do Pulso-250: *a*) vista isométrica *b*) vista de topo.

As Figuras 4.32 *a* e *b* mostram uma representação tempo-espço das respostas ao Pulso-250 para a barra trincada. Aqui fica claro que toda vez que uma onda passa por uma descontinuidade, extremidade da barra ou a própria trinca, dessa reflexão surge mais uma onda que pertence ao segundo modo de propagação. Esse fato evidencia algumas conclusões da literatura sobre detecção de falhas ((Castaings *et al.* 2002) e (Yang e Qiao 2005)) de que trabalhar em faixas de frequência onde exista mais de um modo de propagação não é recomendado, pois o surgimento de outros modos tende a aumentar muito o volume de informação referente ao dano da estrutura monitorada.

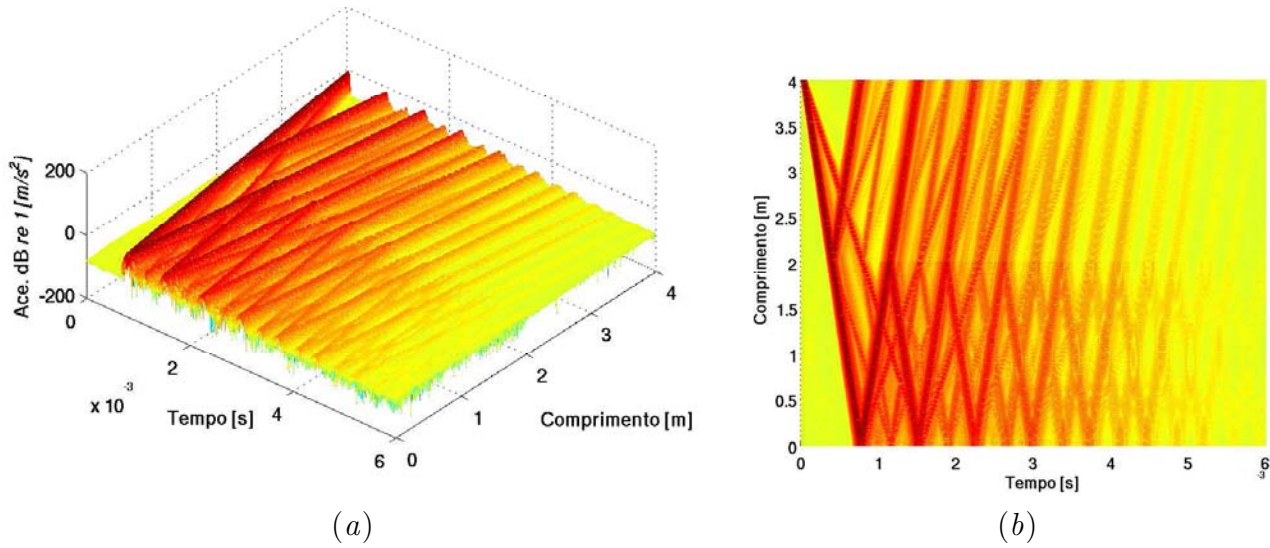


Figura 4.32: Representação tempo-espaço da propagação da onda no modelo de Mindlin-Herrmann de uma barra trincada com excitação do Pulso-250: *a)* vista isométrica *b)* vista de topo.

Até este ponto nada foi comentado em relação aos modos de deformação da secção transversal da barra. Isto ocorreu porque os modelos anteriores apresentam formas de modos mais simples, ou seja, o modelo elementar tem modo de deformação constante em toda seção na direção longitudinal ( $x$ ), enquanto o modelo de Love tem modo de deformação constante em toda seção nas direções longitudinal ( $x$ ) e transversal ( $y$ ). Os modelos de ordem mais alta apresentam formas de modos de deformação com variações mais complexas (linear e quadrática), o que requer uma representação desses modos de deformação para o melhor entendimento do seu comportamento. Desta forma é possível observar o modo de deformação da seção transversal da barra em função dos modos de propagação que foram excitados. A Figura 4.33 mostra a resposta do segundo modo de propagação à excitação do Pulso-250 e os modos de deformação para o modelo de Mindlin-Herrmann. A Figura 4.33*a* mostra a resposta em aceleração do segundo modo de propagação no instante de tempo em que passa pela seção transversal localizada no meio da barra ( $L = 2,0m$ ). A Figura 4.33*b* mostra os modos de deformação desta seção transversal, na qual tomaram-se nove pontos igualmente espaçados ao longo da altura ( $h/2$  a  $-h/2$ ), em cinco instantes de tempo consecutivos. Das formas dos modos pode-se observar uma distribuição da aceleração constante na direção longitudinal combinado com uma linear na direção transversal. Tal comportamento já era esperado tendo em vista a formulação do modelo de Mindlin-Herrmann. A Figura 4.33*c* é similar à Figura 4.33*b* com um atraso de fase de 180 graus na resposta.

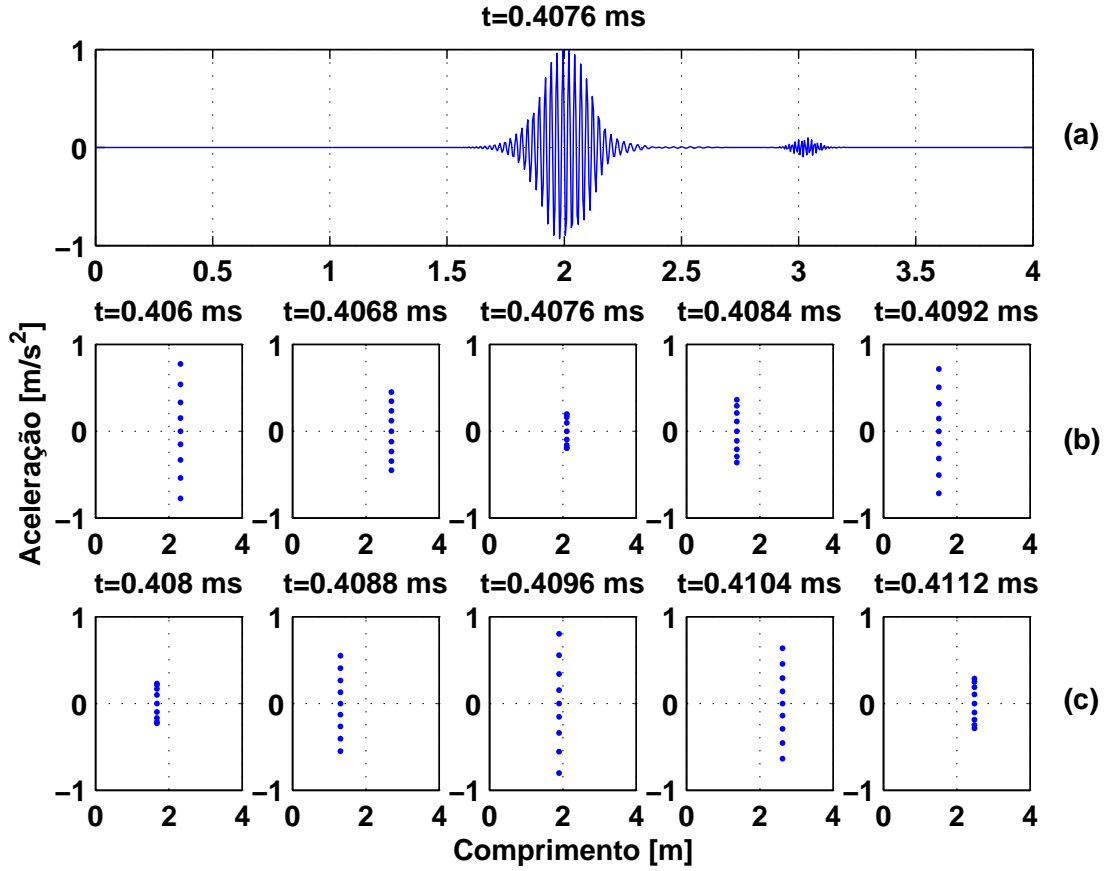


Figura 4.33: Resposta do segundo modo de propagação à excitação do Pulso-250 e os modos de deformação da secção transversal para o modelo de Mindlin-Herrmann.

A Figura 4.34 mostra a resposta do primeiro modo de propagação à excitação do Pulso-250 e os modos de deformação para o modelo de Mindlin-Herrmann. A Figura 4.33a mostra a resposta em aceleração do primeiro modo de propagação no instante de tempo em que passa pela secção transversal localizada no meio da barra ( $L = 2,0m$ ). A Figura 4.34b mostra os modos de deformação desta seção transversal em cinco instantes de tempo consecutivos. Neste caso, observa-se que a forma dos modos é a mesma do caso anterior, contudo a amplitude da componente longitudinal é bem menor que a transversal. Este fato pode ser evidenciado pela quase invariância dos pontos na direção longitudinal nos diferentes instantes de tempo. Tal comportamento mostra que, neste caso, o primeiro modo de propagação gera uma componente longitudinal do modo de deformação com amplitude muito menor do que a transversal. A Figura 4.34c é similar à Figura 4.34b com uma diferença de fase de 180 graus na resposta.



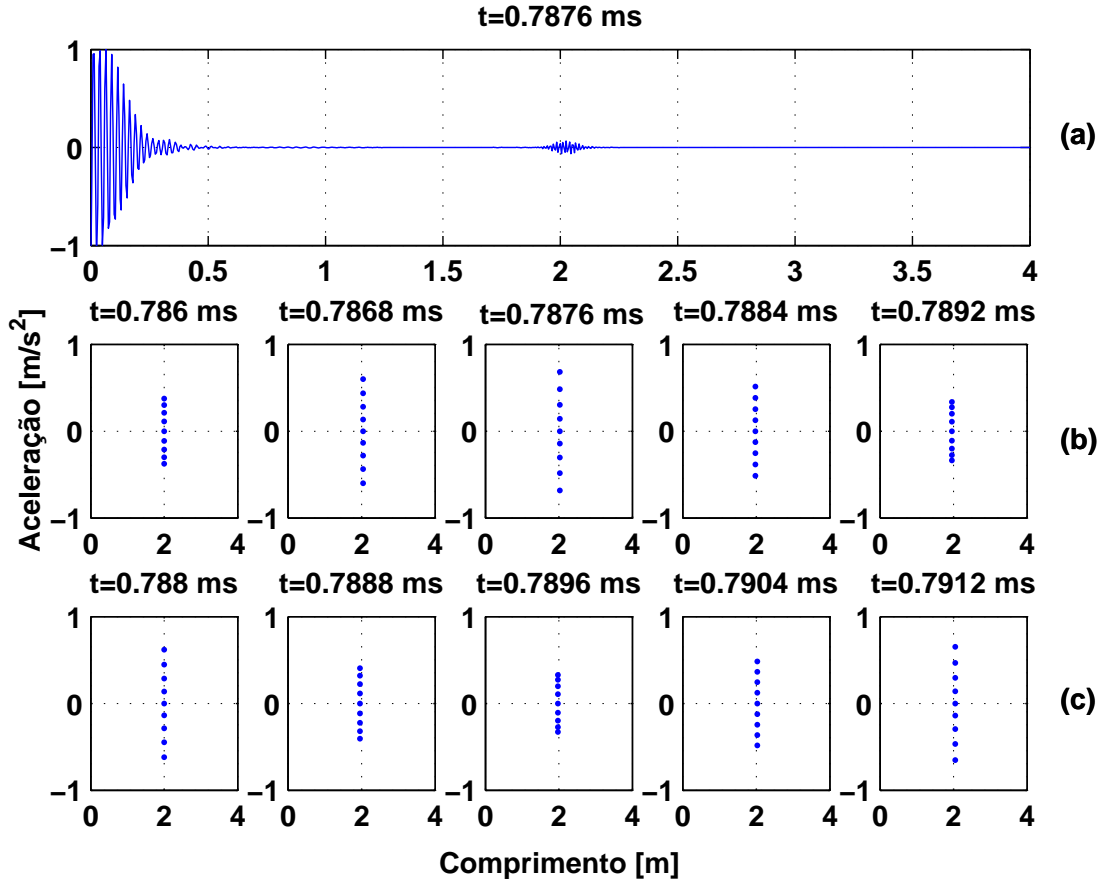


Figura 4.34: Resposta do primeiro modo de propagação à excitação do Pulso-250 e os modos de deformação da secção transversal para o modelo de Mindlin-Herrmann.

## 4.5 Exemplos do Modelo dos Três Modos

Os exemplos numéricos analisados nesta seção utilizam as mesmas geometrias e propriedades das estruturas apresentadas na seção 4.2.

As Figuras 4.24a, b e c mostram os gráficos do número de onda e velocidade de fase em função da frequência para os modelos de barra: elementar; de Love; de Mindlin-Herrmann; dos três modos; e do caso simétrico da placa de Lamb. Os resultados obtidos para o número de onda e velocidade de fase demonstram que para o primeiro modo de propagação, abaixo da frequência de 80 kHz, os cinco modelos encontram-se bem próximos divergindo a partir deste ponto. A Figura 4.35c mostra com maior detalhe que os modelos de Mindlin-Herrmann e dos três modos apresentam uma melhor aproximação para o primeiro modo da placa de Lamb quando comparados aos modelos elementar e de Love. O modelo dos três modos apresenta duas frequências de corte,  $\omega_c = 165,4$  kHz e  $197,7$  kHz, a partir das quais surgem o segundo e o terceiro modo de propagação, respectivamente. Pode-se

observar que acima destas o segundo e o terceiro modos do modelo dos três modos são propagantes ( $k_2$  e  $k_3$  são reais), mas não se aproximam de nenhum dos outros modos exatos. A Figura 4.35d mostra a velocidade de grupo para os modelos de barra: elementar, de Love, de Mindlin-Herrmann e dos três modos, onde pode ser visto o surgimento do segundo modo de propagação após a primeira frequência de corte (165,4 kHz) e do terceiro modo de propagação após a segunda frequência de corte (197,7 kHz). Observa-se que para as frequências mais altas o valor das velocidades de grupo do modelo dos três modos estão ordenados da seguinte forma,  $c_{g2} > c_{g3} > c_{g1}$ . Este resultado demonstra que a ordem das velocidades de grupo do modelo não necessariamente coincide com as da velocidades de fase ( $c_{o1} > c_{o2} > c_{o3}$ ).

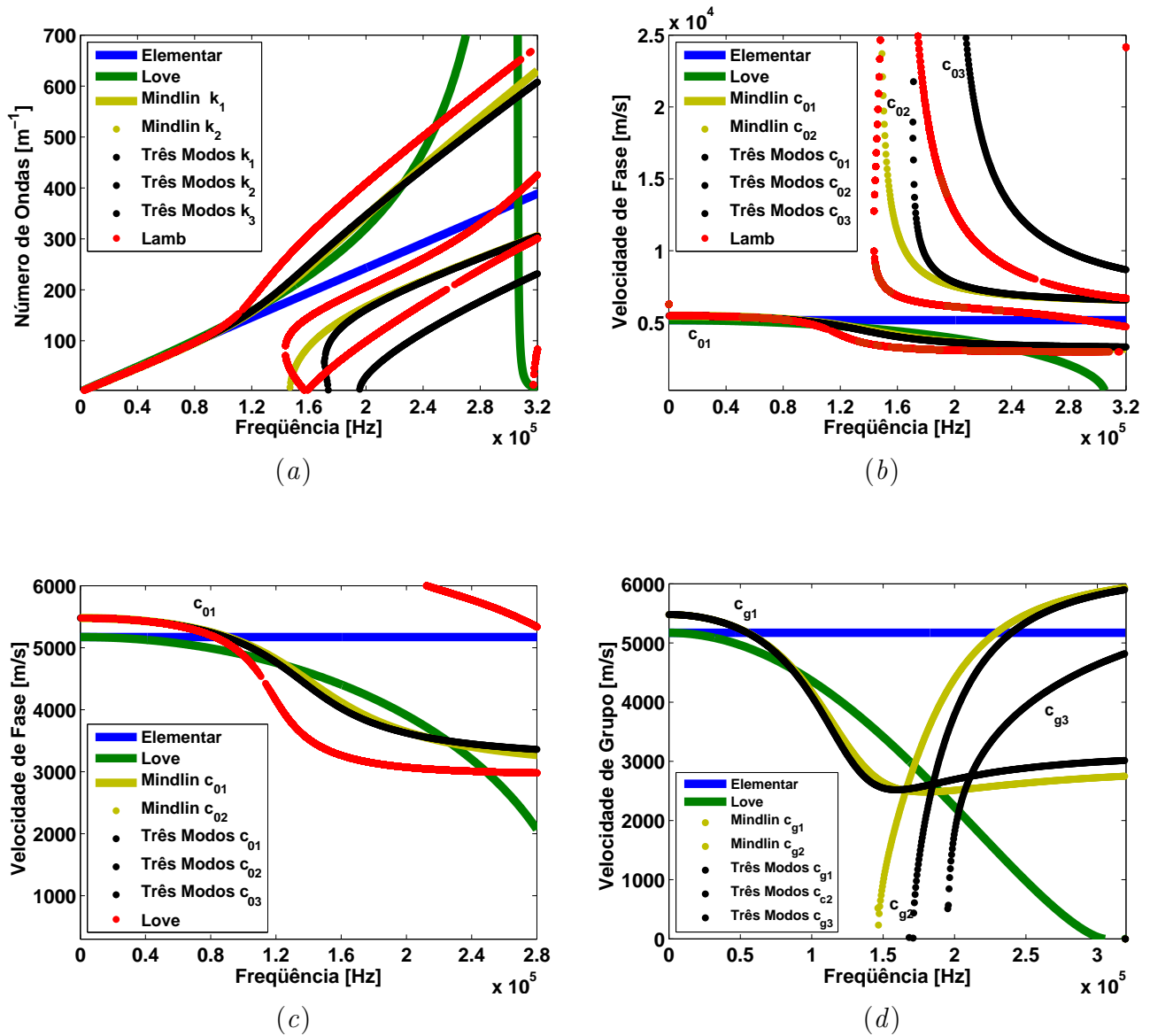


Figura 4.35: Graficos de dispersão: a) número de onda; b) velocidade de fase ; c) velocidade de fase ampliada e d) velocidade de grupo .

A Figura 4.36 mostra as respostas em aceleração no nó 2 usando a força de excitação Pulso-80, com normalização unitária, obtidas para os modelos elementar e dos três modos. As Figuras 4.36a e b mostram os resultados para uma barra saudável apresentados no artigo do Krawczuk *et al.* (2006a) e obtidos com o programa implementado no Matlab, respectivamente. Essas mostram um padrão de comportamento semelhante aqueles já observados para os modelos elementar, de Love e de Mindlin-Herrmann, onde o primeiro pulso refere-se a força de excitação e o segundo pulso é devido a reflexão da onda na extremidade esquerda da barra (nó 1). Novamente, na resposta apresentada nos trabalhos do Krawczuk surge um terceiro pulso (circulado em vermelho), o qual não aparece nos resultados calculados pelo programa implementado. Krawczuk, refere-se a este pulso como o segundo modo de propagação da onda. Contudo, da Figura 4.37 que apresenta a parte real do número de onda para o modelo dos três modos, fica claro que abaixo das frequências de corte ( $\omega_c = 165,4$  kHz e  $197,7$  kHz) o número de onda do segundo e terceiro modo  $k_2$  e  $k_3$  serão números imaginários puro caracterizando ondas evanescentes.

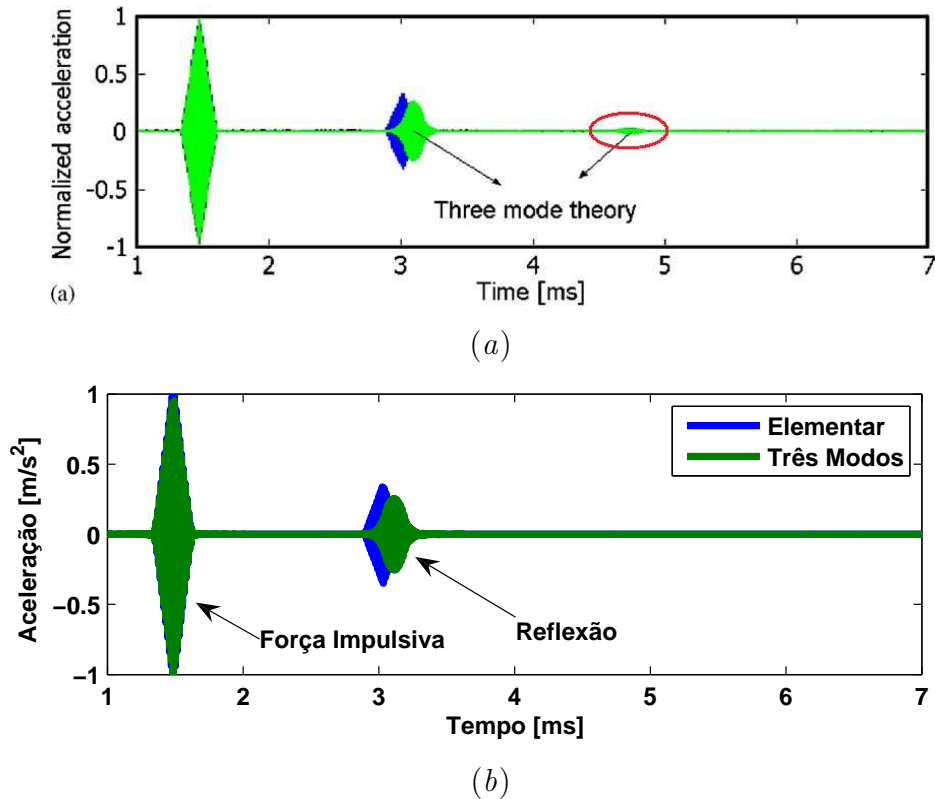


Figura 4.36: Resposta ao Pulso-80 dos modelos elementar e dos três modos para uma barra saudável: a) resultados segundo Krawczuk *et al.* (2002a) b) resultados segundo o programa implementado.

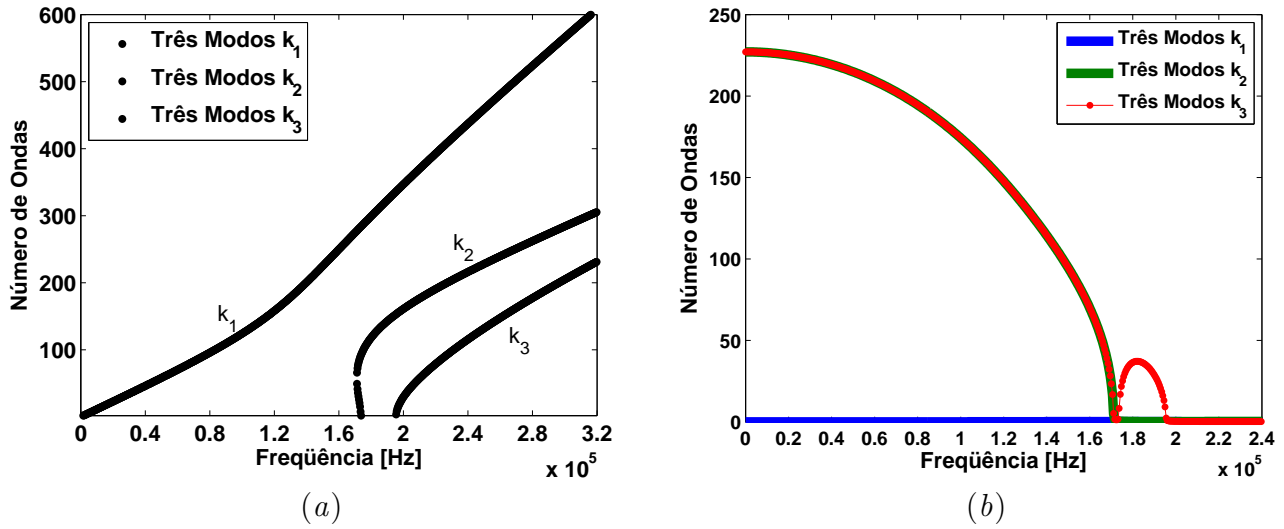


Figura 4.37: Número de Onda dos três modos: *a*) parte real *b*) parte imaginária.

As Figuras 4.38*a* e *b* mostra os resultados para uma barra trincada, com uma profundidade da trinca de 20% de  $h$ , apresentados no artigo do Krawczuk *et al.* (2006b) e obtidos no programa implementado no Matlab, respectivamente. Nesse caso, também, os resultados mostram um padrão de comportamento semelhante aos dos modelos elementar, de Love e de Mindlin-Herrmann, onde o primeiro pulso refere-se a força de excitação, o segundo pulso é devido a reflexão na trinca e o terceiro pulso refere-se a reflexão da onda na extremidade esquerda da barra (nó 1). Para este caso, os resultados apresentados por Krawczuk *et al.* (2006b) mostram um comportamento similar ao da barra saudável com o aparecimento de um pulso adicional (Figura 4.38*a*), o que não se verifica no programa implementado.

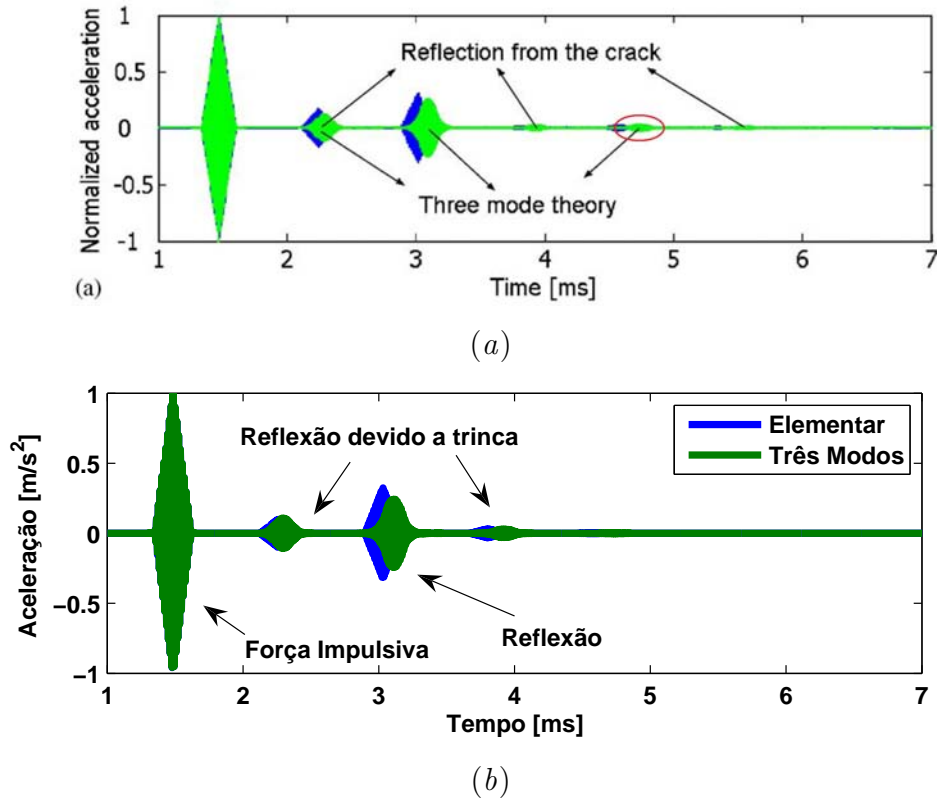


Figura 4.38: Resposta ao Pulso-80 dos modelos elementar e dos três modos para uma barra trincada: *a*) resultados segundo Krawczuk *et al.* (2002b) *b*) resultados segundo o programa implementado..

As Figuras 4.39*a* e *b* mostram a representação tempo-espaço do modelo dos três modos a resposta em aceleração a uma força de excitação Pulso-80 de uma barra saudável e trincada, respectivamente. O comportamento aqui observado não difere muito daqueles apresentados para os modelos elementar, de Love e de Mindlin-Herrmann.

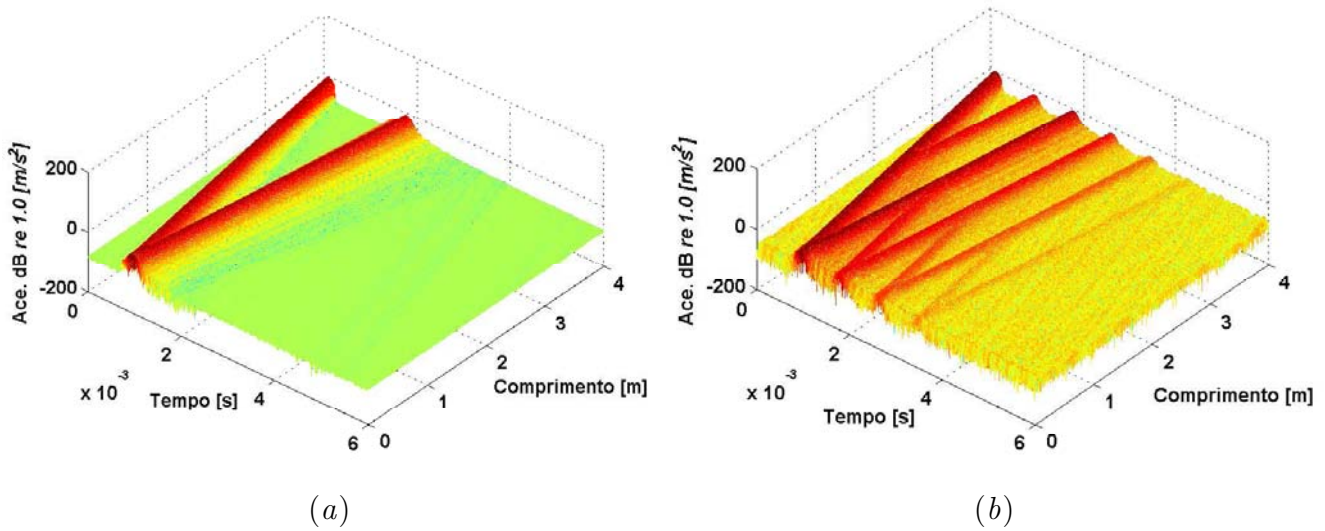


Figura 4.39: Representação tempo-espço da propagação da onda no modelo dos três modos: *a*) saudável; e *b*) trincado, com excitação do Pulso-80.

Para investigar o comportamento do modelo dos três modos em faixas de frequências mais altas foi utilizado também o Pulso-250. A Figura 4.40 mostra a resposta à excitação ao Pulso-250 para os modelos elementar e dos três modos calculadas em diferentes valores de tempo. Neste caso, as respostas foram obtidas interpolando-se ao longo do comprimento da estrutura com um  $\Delta x = 0.005$  m e para  $y = h/2$ . Observa-se que a resposta do modelo dos três modos apresenta dois pulsos a mais do que o modelo elementar. Estes pulsos adicionais caracterizam o segundo e o terceiro modos de propagação. Contudo, deve-se identificar de forma inequívoca qual pulso corresponde a que modo. O primeiro pulso é identificado como o segundo modo, pois da Figura 4.35d observa-se que na frequência de 250 kHz este modo tem maior velocidade de grupo (dos três modos  $c_{g2}$ ), o segundo pulso é referente ao terceiro modo de propagação, pois este apresenta o valor da velocidade de grupo intermediário (dos três modos  $c_{g3}$ ). Um raciocínio análogo confirma o terceiro pulso como sendo correspondente ao primeiro modo.

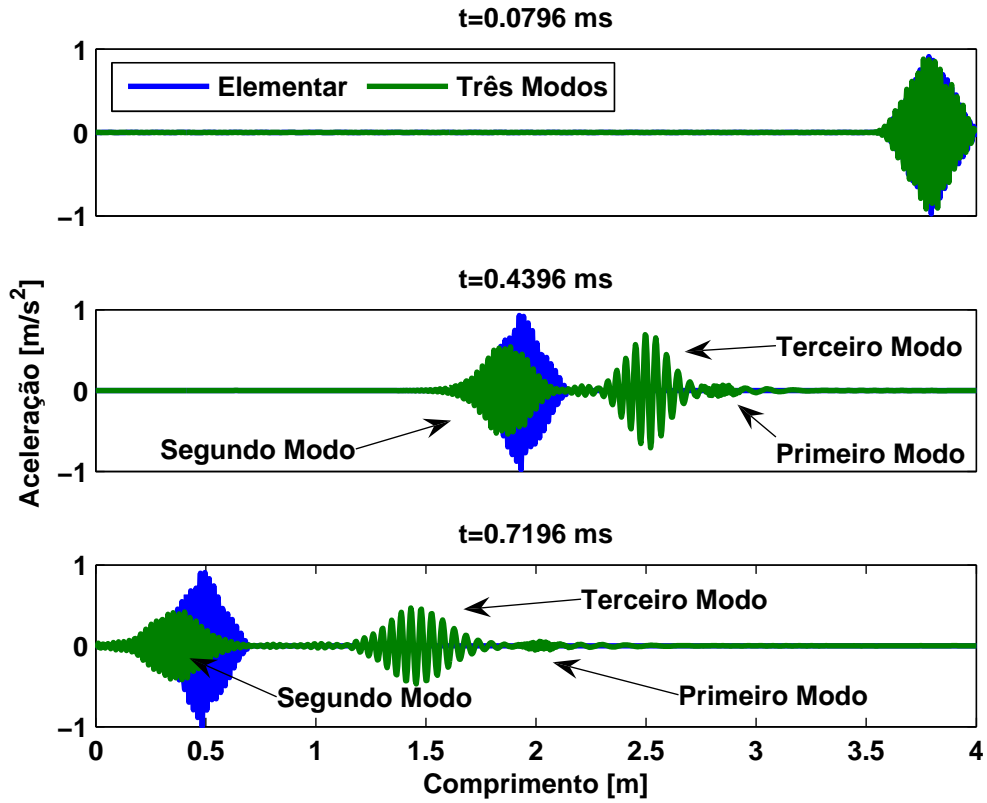


Figura 4.40: Resposta para vários instantes de tempo ao longo do comprimento da barra, altura  $h/2$ , para o Pulso-250.

As Figuras 4.41a e b mostram uma representação tempo-espaço das respostas ao Pulso-250 para a barra saudável. Uma observação importante neste caso é que para cada onda de excitação ou reflexão três ondas serão propagadas correspondendo ao primeiro, segundo e terceiro modo de propagação.

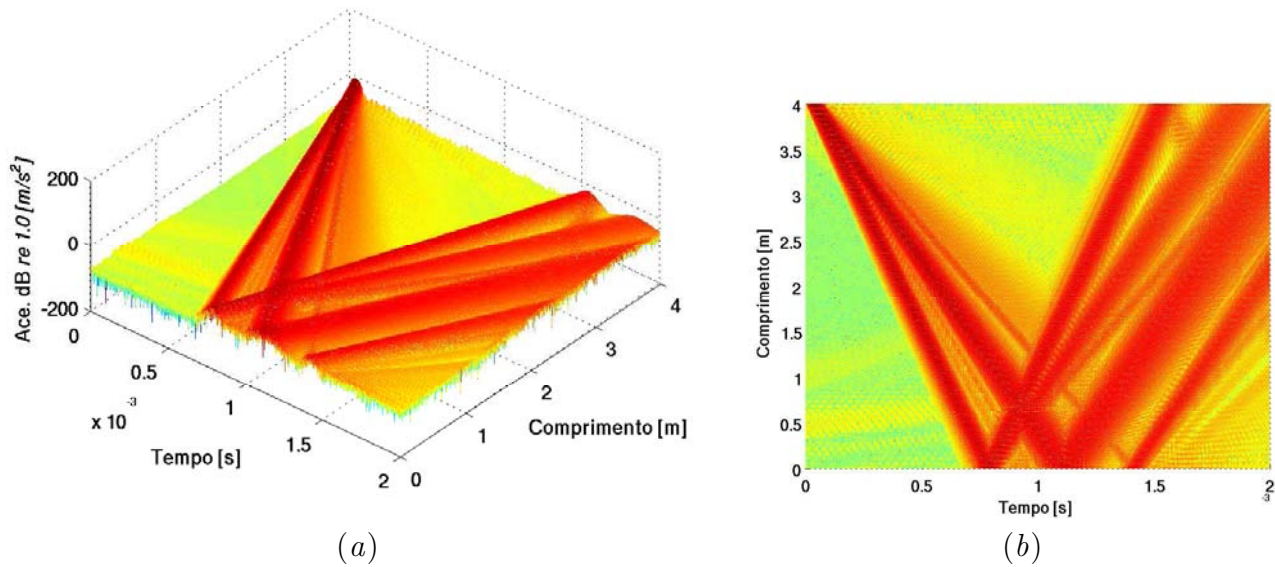


Figura 4.41: Representação tempo-espço da propagação da onda no modelo dos três modos de uma barra saudável com excitação do Pulso-250: a) vista isométrica b) vista de topo.

As Figuras 4.42 *a* e *b* mostram uma representação tempo-espço das respostas ao Pulso-250 para a barra trincada. Aqui novamente fica claro que toda vez que uma onda passa por uma descontinuidade, extremidade da barra ou a própria trinca, dessa reflexão surge mais duas onda que pertence ao segundo e terceiro moda de propagação. Esse fato evidencia algumas conclusões da literatura sobre detecção de falhas ((Castaings *et al.* 2002) e (Yang e Qiao 2005)) de que trabalhar em faixas de frequência onde exista mais de um modo de propagação não é recomendado, pois o surgimento de outras modos tende a aumentar muito o volume de informação referente ao dano da estrutura monitorada.



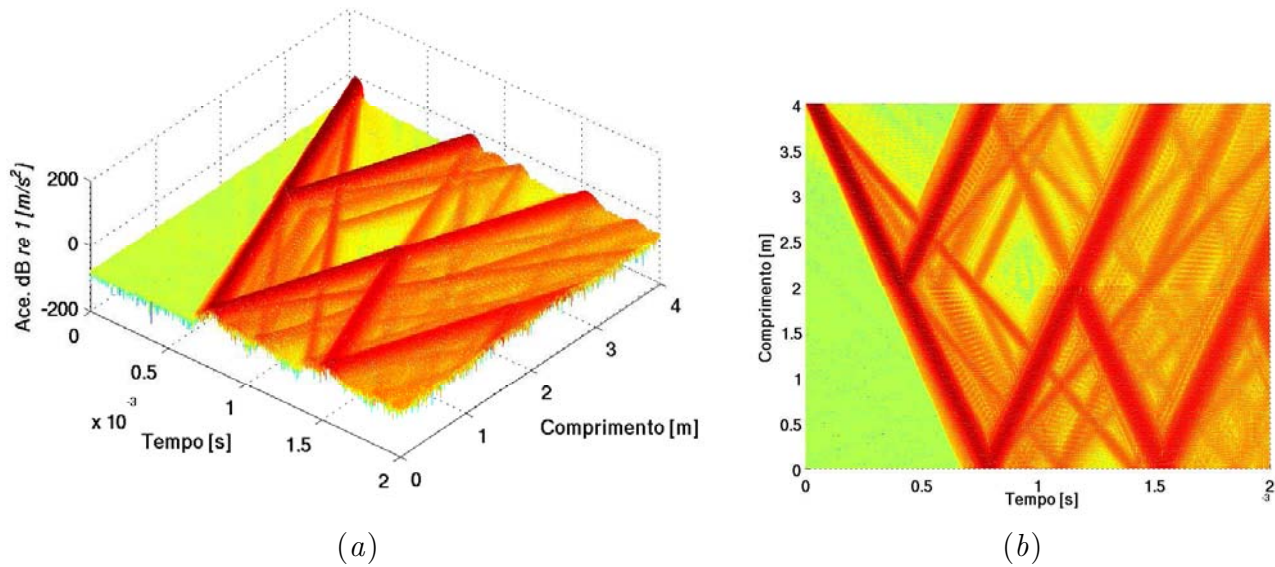


Figura 4.42: Representação tempo-espço da propagação da onda no modelo dos três modos de uma barra trincada com excitação do Pulso-250: a) vista isométrica b) vista de topo.

Para o modelo dos três modos é acrescido mais um modo de propagação o que requer uma representação do modo de deformação da secção transversal da barra para o melhor entendimento do seu comportamento. Assim é possível observar o modo de deformação da secção transversal da barra em função dos modos de propagação que foram excitados. A Figura 4.43 mostra a resposta em aceleração do segundo modo de propagação à excitação do Pulso-250 e a forma do modo de deformação da secção correspondente. A Figura 4.43a mostra a resposta do segundo modo de propagação no instante de tempo em que passa pela secção transversal localizada no meio da barra ( $L = 2,0m$ ). A Figura 4.43b mostra os modos de deformação desta secção transversal, na qual tomaram-se nove pontos igualmente espaçados ao longo da altura ( $h/2$  a  $-h/2$ ), em cinco instantes de tempo consecutivos. Das formas dos modos pode-se observar uma distribuição da aceleração parabólica na direção longitudinal combinada com uma linear na direção transversal. Tal comportamento já era esperado tendo em vista a Equação (3.147) onde observa-se que o deslocamento longitudinal do modelo dos três modos é na realidade a soma de duas parcelas de deslocamentos longitudinais, onde uma tem distribuição uniforme e a outra parabólica. A Figura 4.43c é similar à Figura 4.43b com uma diferença de fase de 180 graus na resposta.

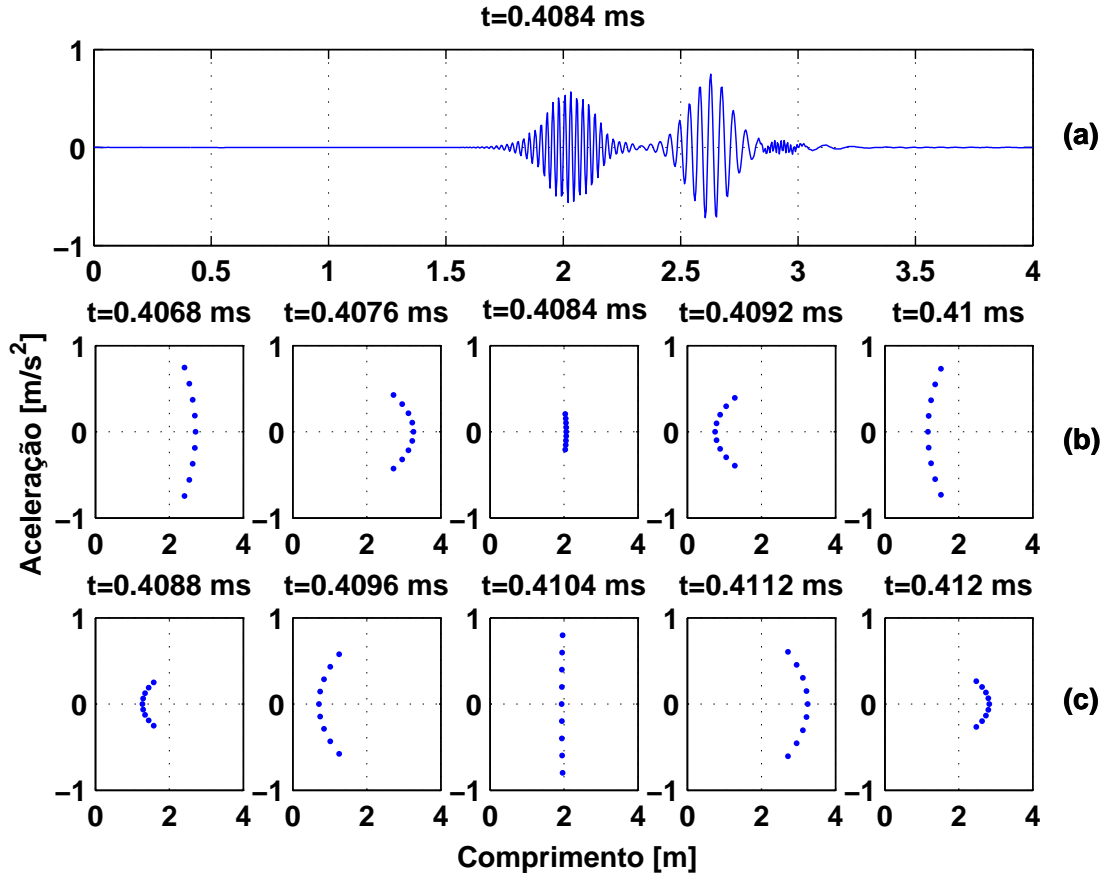


Figura 4.43: Resposta do segundo modo de propagação à excitação do Pulso-250 e os modos de deformação da secção transversal para o modelo dos três modos.

A Figura 4.45 mostra a resposta do terceiro modo de propagação à excitação do Pulso-250 e os modos de deformação correspondentes. A Figura 4.45a mostra a resposta em aceleração do terceiro modo de propagação no instante de tempo em que passa pela secção transversal localizada no meio da barra ( $L = 2,0m$ ). A Figura 4.45b mostra os modos de deformação desta secção para cinco instantes de tempo consecutivos. Neste caso, observa-se que a forma dos modos é a mesma do caso anterior, contudo a secção apresenta uma deformação predominantemente parabólica. Este fato pode ser observado pela quase invariância de deslocamentos uniforme na direção longitudinal de todos os pontos da secção, visto com maior clareza no ponto central da secção, para todos instantes de tempo mostrados. A Figura 4.45c é similar à Figura 4.45b com uma diferença de fase de 180 graus na resposta.

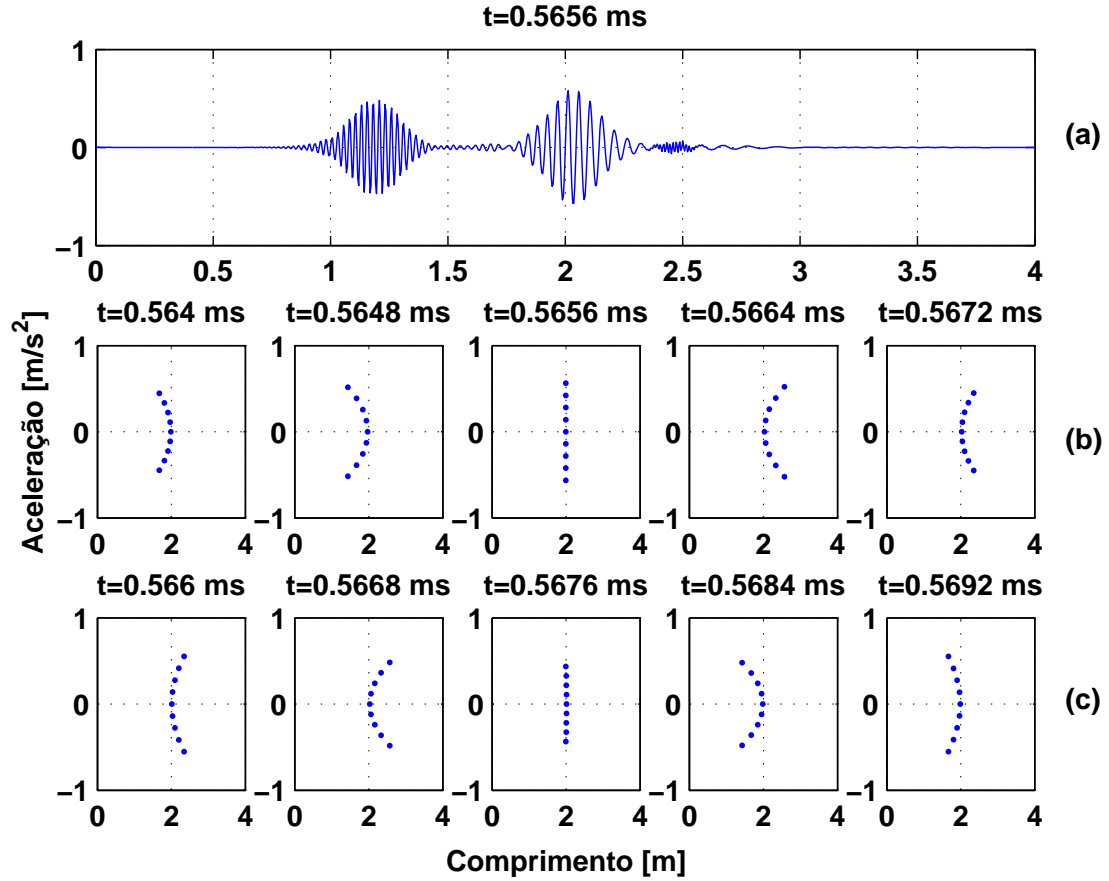


Figura 4.44: Resposta do terceiro modo de propagação à excitação do Pulso-250 e os modos de deformação da secção transversal para o modelo dos três modos.

A Figura 4.45 mostra a resposta do primeiro modo de propagação à excitação do Pulso-250 e os modos de deformação correspondentes. A Figura 4.45a mostra a resposta em aceleração do primeiro modo de propagação no instante de tempo em que passa pela secção transversal localizada no meio da barra ( $L = 2,0m$ ). A Figura 4.34b mostra os modos de deformação desta secção para cinco instantes de tempo consecutivos. Neste caso, observa-se que a forma dos modos de deformação é muito parecida com aquela obtida com o modelo de Mindlin-Herrmann (Figura 4.34). Observa-se que devido à amplitude da componente longitudinal ser bem menor que a transversal não há deslocamentos apreciáveis nesta direção, consequentemente não é mais possível visualizar a distribuição parabólica típica deste modelo. Este fato fica evidente pela quase invariância dos pontos na direção longitudinal para os todos os instantes de tempo mostrados. A Figura 4.45c é similar à Figura 4.45b com uma diferença de fase de 180 graus na resposta.

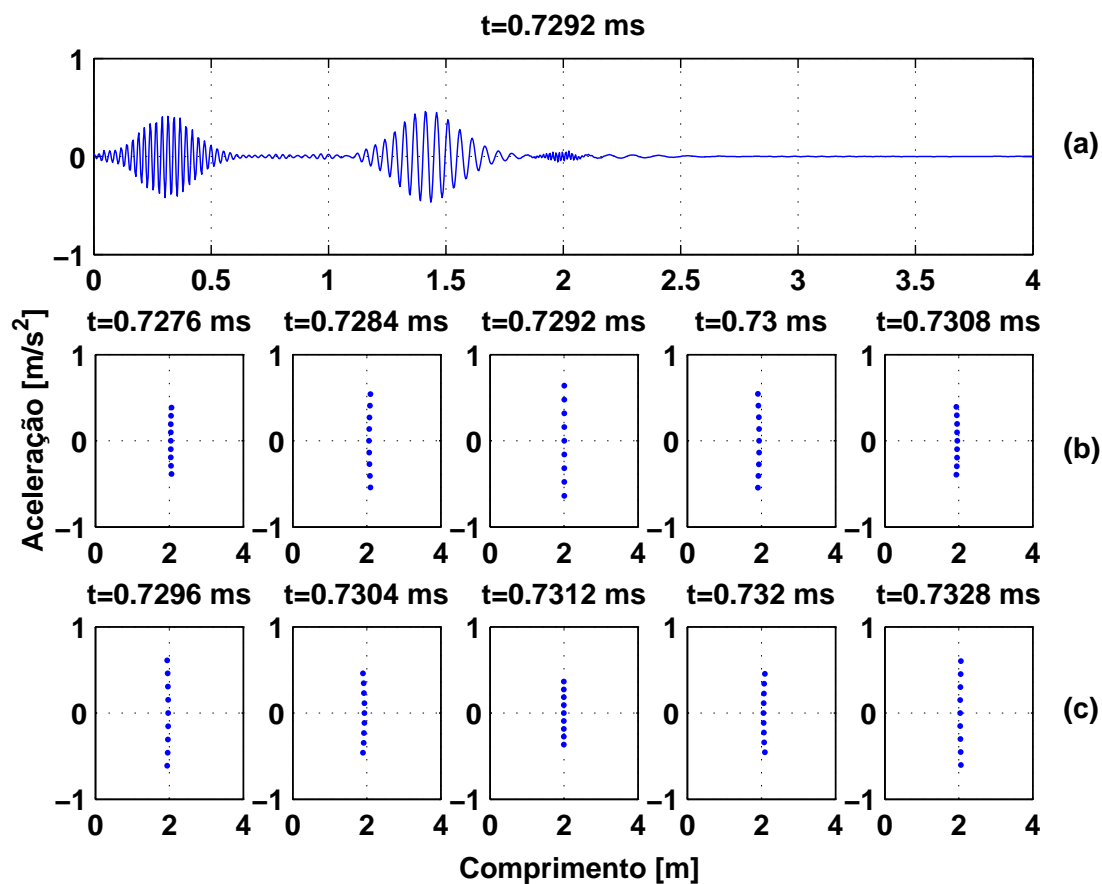


Figura 4.45: Resposta do primeiro modo de propagação à excitação do Pulso-250 e os modos de deformação da secção transversal para o modelo dos três modos.

# Capítulo 5

## Conclusão

Este trabalho apresentou uma família de elementos espectrais para o estudo da propagação de ondas em estruturas tipo barra saudável finita, semi-infinita (*throw-off*) e trincada. Os elementos espectrais de barra foram formulados usando-se o modelo elementar, bem como os ordem mais alta: modelo de Love, de Mindlin-Herrmann e dos três modos.

Os gráficos de dispersão (número e velocidade de onda) para os modelos de barra elementar, de Love, de Mindlin-Herrmann e dos três modos são comparados com o caso simétrico da placa de Lamb. Os resultados obtidos demonstram que para o primeiro modo de propagação, abaixo da frequência de 80 kHz, os cinco modelos encontram-se bem próximos divergindo a partir deste ponto. Para o primeiro modo, em toda faixa de frequências analisada, os modelos de Mindlin-Herrmann e dos três modos apresentam uma melhor aproximação com a placa de Lamb, quando comparados aos modelos elementar e de Love. O modelo de Mindlin-Herrmann apresenta uma frequência de corte e o dos três modos duas frequências de corte, a partir das quais surgem os modos de propagação adicionais. Esses modos não existem nos modelos de ordem mais baixa e não se aproximam de nenhum dos outros modos da placa de Lamb. Acima da frequência de corte modos adicionais são propagantes. Para o modelo dos três modos, acima da segunda frequência de corte, a ordem decrescente dos valores das velocidades de grupo ( $c_{g2} > c_{g3} > c_{g1}$ ) não é necessariamente correspondente à das velocidades de fase ( $c_{o1} > c_{o2} > c_{o3}$ ). Outra importante conclusão é que, antes de escolher um modelo, é necessário estudar as curvas de dispersão, pois dependendo das propriedades e geometria da estrutura, os modelos elementar e Love já apresentam um bom resultado. Caso contrário, para frequências mais elevadas, o modelo de Mindlin-Herrmann ou dos três de modo devem ser aplicados.

Os elementos espectrais saudável e trincado implementados com os modelos elementar e de Love apresentam o mesmo comportamento daqueles encontrados na literatura. Contudo, os ele-

mentos espectrais saudável e trincado implementados com os modelos de Mindlin-Herrmann e dos três modos apresentaram resultados divergentes com aqueles dos trabalhos de Krawczuk *et al.* (2006a) e Krawczuk *et al.* (2006b), quanto ao surgimento de um modo de propagação adicional em análises realizadas abaixo da primeira frequência de corte. Segundo os autores, o modo adicional é devido o segundo modo de propagação da onda para ambos modelos (Mindlin-Herrmann e dos três modos). Entretanto, observando-se a parte real e imaginária do gráfico de número de onda de ambos modelos, fica claro que abaixo da frequência de corte o número de onda do segundo modo ( $k_2$ ) será um número imaginário puro (onda evanescente), enquanto que acima dessa será um número real puro (onda propagante). Este fato torna todas as componentes de onda abaixo da frequência de corte não-propagantes e portanto improváveis de surgirem nas respostas daqueles exemplos analisados. Doyle (1997) reforça o resultado aqui apresentado quando afirma que para barras esbeltas, abaixo da frequência de corte, o segundo modo de propagação não é normalmente observado.

Para todos os modelos implementados, para trincas cuja profundidade não seja igual ou inferior a 10% da altura da seção transversal, observa-se que através da simples observação da resposta da estrutura a uma excitação impulsiva é possível determinar a localização da trinca contida no mesmo, confirmando que os modelos de elemento espectral trincado analisados podem ser usados como uma ferramenta eficiente para a localização de trincas. Para os casos de estruturas cuja trinca tenha profundidade inferior àquele percentual, os mesmos modelos podem ser usados para localização, desde que seja feita a diferença entre as respostas da barra saudável e da barra trincada.

Uma outra forma bem mais intuitiva de mostrar a propagação da onda na estrutura e a existência da trinca é apresentada, a qual consiste de uma representação gráfica tri-dimensional tempo-espaço-amplitude. No eixo  $x$  representa-se o tempo, no eixo  $y$  o comprimento da estrutura, e no eixo  $z$  o valor dB da amplitude da onda. Para os modelos analisados, estes gráficos demonstram que modelos com  $n$  modos de propagação geram  $n$  ondas propagantes, assim quando uma destas ondas atinge uma descontinuidade (extremidade da barra ou trinca) refletem outras novas  $n$  ondas. Logo, para o caso de barras trincadas as ondas adicionais geradas criam uma grande quantidade de ondas. Este comportamento confirma as conclusões da literatura de que trabalhar em faixas de frequências onde exista mais de um modo de propagação não é recomendado, pois o surgimento de outros modos de propagação tende a aumentar muito o volume de informação dificultando a detecção do dano.

Os modos de propagação de onda geram um modo de deformação da secção transversal da barra. Os modelos de ordem mais baixa apresentam formas de modos mais simples facilmente compreendidas e bem reportadas na literatura. O modelo elementar tem modo de deformação constante em toda seção na direção longitudinal, enquanto o modelo de Love tem modo de deformação constante em toda secção nas direções longitudinal e transversal. Os modelos de ordem mais alta apresentam formas de modos de deformação com variações mais complexas (linear e quadrática), o que requer uma representação gráfica desses para o melhor entendimento do seu comportamento. O modelo de Mindlin-Herrmann apresenta modos com distribuição constante na direção longitudinal combinado com uma linear na direção transversal, enquanto o modelo dos três modos apresenta uma distribuição parabólica na direção longitudinal combinada com uma linear na direção transversal

Neste trabalho apresenta-se uma nova forma de representação dos modos de propagação, a qual mostra a resposta da estrutura em cada modo de propagação em função do tempo, bem como, os modos de deformação da seção transversal, em cada modo de propagação, para nove pontos igualmente espaçados ao longo da altura da secção (plano longitudinal-transversal) em cinco instantes de tempo consecutivos. Esse mesmo modo de deformação da seção é mostrado também com uma diferença de fase de 180 graus na resposta

As formas dos modos do modelo de Mindlin-Herrmann no segundo modo de propagação mostram de forma clara uma distribuição constante na direção longitudinal combinada com uma distribuição linear na direção transversal, como previsto no modelo teórico. Contudo, no primeiro modo de propagação embora possa ser tenuemente percebido a mesma forma do modo de deformação do caso anterior, as amplitudes das componentes longitudinais são bem menores que as transversais. Tal comportamento mostra que, neste caso, o primeiro modo de propagação gera componentes longitudinais do modo de deformação com amplitudes muito menores do que as transversais.

As formas dos modos do modelo dos três modos no segundo modo de propagação, mostram claramente uma distribuição constante somada a uma parabólica na direção longitudinal combinada com uma linear na direção transversal, como previsto teoricamente. Contudo, no terceiro modo de propagação embora seja ligeiramente observado que a forma dos modos é a mesma do caso anterior, as amplitudes mostram uma distribuição predominantemente parabólica. Também, no primeiro modo de propagação, observa-se que a forma dos modos é a mesma dos anteriores, mas as amplitudes das componentes longitudinais são bem menores que as transversais, conse-

quentemente não é mais possível visualizar a distribuição parabólica típica deste modelo. Este comportamento mostra que, neste caso, o terceiro modo de propagação gera componentes longitudinais predominantemente parabólicas, enquanto o primeiro modo de propagação gera componentes predominantemente transversais.

## 5.1 Sugestões de trabalhos futuros

1. Modelagem pelo método do elemento espectral de outros tipos de estruturas com geometrias mais complexas, tais como viga, placa e casca, incluindo trinca e/ou outros tipos de danos.
2. Modelagem pelo método do elemento espectral para materiais compósitos incluindo dano.
3. Extender a modelagem de barras aqui apresentada para modos de propagação de ordem ainda mais altos, tais como, modelos dos quatro e cinco modos de propagação .

## 5.2 Trabalhos publicados

Durante a realização desta dissertação, foram publicados os seguintes artigos em anais de congressos e reuniões científicas:

Pereira, F. N., Pereira, V. S., Dos Santos, J. M. C., “Análise Energética em uma Barra Trincada Usando o Método Elemento Espectral”, Iberian Latin American Congress on Computation Methods in Engineering - CILAMCE, 04-07 November, Maceió-AL, 2008.

Pereira, V. S., Pereira, F. N., Arruda, J. R. F., Dos Santos, J. M. C., “High Frequency using Energy Spectral Element Methods, Brazil AFOSR Workshop on Advanced Structural Mechanics and Computational Mathematics, 18-20 November, Campinas-SP, 2008.



# Referências

- Ahmida, K. M. (2001). “Análise dinâmica de pórticos em médias e altas frequências,” PhD thesis, Unicamp.
- Castaings, M., Clezio, E. L., e Hosten, B. (2002). “Modal decomposition method for modeling the interaction of lamb waves with cracks.” *Acoustical Society of America*, 112, 2569–2582.
- Chondros, T. G., Dimarogonas, A. D., e Yao, J. (1996). “A consistent cracked bar vibration theory.” *Journal of sound and vibration*, 200, 230–313.
- DeLanghe, K. e Sas, P. (1996). “tatistical analysis of the power injection method.” *Journal of the Acoustical Society of America*, 100, 291–303.
- Dimarogonas, A. D. (1996). “Vibration of cracked structures: a state of the art revie.” *Engineering Fracture Mechanics*, 55, 831–857.
- Dimarogonas, A. D. e Papadopoulos, C. A. (1983). “Vibration of cracked shafts in bending.” *Journal of sound and vibration*, 91, 583–593.
- Doyle, J. F. (1997). *Wave Propagation in Structures*. Springer-Verlag, New York.
- Galán, J. M. e Abascal, R. (1996). “Numerical simulation of lamb wave scattering in semi-infinite plates.” *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 53, 1145–1173.
- Kisa, M., Brandon, J., e Topcu, M. (1998). “Free vibration of cracked beams by a combination of finite elements and component mode synthesis methods.” *Computers and Structures*, 67, 215–223.
- Krawczuk, M. (2002). “Application of spectral beam finite element with a crack and iterative search technique for damage detection.” *Finite Elements in Analysis and Design*, 38, 537–548.

- Krawczuk, M., Grabowska, J., e Palacz, M. (2006a). “Longitudinal wave propagation. part i - comparison of rod theories.” *Journal of Sound and Vibration*, 295, 461–478.
- Krawczuk, M., Grabowska, J., e Palacz, M. (2006b). “Longitudinal wave propagation. part ii - comparison of rod theories.” *Journal of Sound and Vibration*, 295, 479–490.
- Krawczuk, M., Palacz, M., e Ostachowicz, W. (2003). “The dynamic analysis of a cracked timoshenko beam by the spectral element method.” *Journal of Sound and Vibration*, 264, 1139–1153.
- Krawczuk, M., Zak, A., e Ostachowicz, W. (2000). “Elastic beam finite element with a transverse elastoplastic crack.” *Finite Elements in Analysis and Design*, 34, 61–73.
- Lee, C. e Staszewski, W. J. (2007). “Sensor location studies for damage detection with lamb waves.” *Smart Materials and Structures*, 16, 399–408.
- Lyon, R. H. e Dejong, R. G. (1995). *Theory and Applications of Statistical Energy Analysis*. Butterworths-Heinemann.
- Lyon, R. H. e Maidanik, G. (1962). “Power flow between linearly coupled oscillators.” *Journal of Acoustical Society of America*, 34, 623–639.
- Mindlin, R. D. e Herrmann, G. (1950). “A one-dimensional theory of compressional waves in a elastic rod.” *Proceedings of the First US National Congress of Applied Mechanics*. 187–191.
- Mindlin, R. D. e McNiven, H. D. (1960). “Axially symmetric waves in elastic rods.” *Journal of Applied Mechanics*, 27, 145–151.
- Palacz, M. e Krawczuk, M. (2002). “Analysis of longitudinal wave propagation in a cracked rod by the spectral element method.” *Computers and Structures*, 80, 1809–1816.
- Papadopoulos, C. A. e Dimarogonas, A. D. (1986). “Coupled longitudinal and bending vibrations of a rotating shaft with an open crack.” *Journal of sound and vibration*, 117, 81–93.
- Popov, E. P. (1978). *Introdução a Mecânica dos Sólidos*. Edgard Blücher.
- Qian, G. L., Gu, S. N., e Jiang, J. S. (1990). “The dynamic behavior and crack detection of a beam with a crack.” *Journal of sound and vibration*, 138, 233–243.

- Rizzatti, L. (1999). “Análise dinâmica, numérica e experimental de uma viga trincada. Master’s thesis, Unicamp.
- Rose, J. L. (2004). *Ultrasonic Waves in Solid Media*. Cambridge university press.
- Santos, E. R. O. (2006). “Análise de vibrações em altas frequências por métodos de energia,” PhD thesis, Unicamp.
- Santos, E. R. O., Pereira, V. S., Arruda, J. R. F., e Santos, J. M. C. D. (2008). “Structural damage detection using energy flow models.” *Shock and Vibration*, 15, 317–230.
- Tada, H., Paris, P. C., e Irwin, G. R. (2000). *The Stress Analysis of Cracks Handbook*. Cambridge university press, New York.
- Tauchert, T. R. (1974). *Energy Principles in Structural Mechanics*. McGraw-Hill, New York.
- Valentim, L. (2003). “Análise teórica e experimental de estruturas de controle ativo de ruído,” PhD thesis, Unicamp.
- Yang, M. e Qiao, P. (2005). “Modeling and experimental detection of damage in various materials using the pulse echo method and piezoelectric sensors actuators.” *Smart Materials and Structures*, 14, 1083–1100.
- Zienkiewicz, O. C. (1977). *The Finite Element Method*. edition, McGraw-Hill, New York.